DM08 (Terminale S Spécialité)

Date :

A rendre pour le **Jeudi 21 Février**.

Exercice

On souhaite construire un algorithme qui permet de trouver un couple (u,v) solution de $au+bv=PGCD(a,b)$.

Nous savons que tous les restes obtenus dans l'algorithme d'Euclide, peuvent s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de a et b.
Si l'on prend trois restes successifs de l'algorithme on peut donc trouver :

$$\begin{cases} r_{n-2} = au_{n-2} + bv_{n-2} \\ r_{n-1} = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ r_n = au_n + bv_n \end{cases}$$

De plus il existe q un entier naturel tel que $r_{n-2} = qr_{n-1} + r_n$

1. Démontrer que $\forall n \geq 2$

$$\begin{cases} u_n = u_{n-2} - qu_{n-1} \\ v_n = v_{n-2} - qv_{n-1} \end{cases}$$

2. En posant $r_0 = a \quad et \quad r_1 = b$ déterminer les deux premiers termes des suites (u) et (v).

3. On cherche donc à calculer les termes des suites (u) et (v) tant que $r_{n-1} \neq 0$.
Ecrire un algorithme qui permet de déterminer ces termes et qui affiche un couple (u,v) solution de $au+bv=PGCD(a,b)$

4. Construire un programme Ti82 traduisant l'algorithme ci-dessus et le tester avec $a=2958$ et $b=497$
(on trouve $u=-145$ et $v=863$)

5. Construire un programme qui donne les solutions de l'équation diophantienne de la forme
$$xu+yv=c$$
après avoir vérifié qu'il y a bien des couples possibles.

6. Vérifier votre programme avec l'équation : $4x+5y=7$