DM07 (Terminale S Spécialité)

Exercice 01

On note $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1. Montrer par récurrence que pour toute matrice A d'ordre deux, telle que la somme des coefficients des lignes est égale à 1 alors, pour tout n entier naturel, A^n est une matrice carrée d'ordre 2 dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.
2. Trouver deux réels a et b tels que $A^2=aA+bI$
3. En déduire qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que l'on ait :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A^n=a_nA+b_nI$$
4. Montrer que l'on a, pour tout entier strictement positif n :
$$a_{n+1}=-\frac{1}{6}a_n+1\quad et\quad b_{n+1}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}$$
5. On note (u_n) la suite définie pour tout n strictement positif
$$u_n=a_n-\frac{6}{7}$$
   a. Montrer que la suite u est géométrique.
   b. Déterminer alors u_n en fonction de n puis a_n en fonction de n.
6. On note (v_n) la suite définie pour tout n strictement positif
$$v_n=b_n-\frac{1}{7}$$
   c. Montrer que la suite v est géométrique.
   d. Déterminer alors v_n en fonction de n puis b_n en fonction de n.
7. Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.
8. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}A^n$

Exercice 02

On note (a_n) et (b_n) deux suites définies pour tout n entier strictement positif :
$$a_n=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right]\text{ et }b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]$$

1. Montrer que pour tout n entier strictement positif :
$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\text{ et }(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$$
2. Démontrer que pour tout n entier strictement positif :
$$a_n^2-2b_n^2=(-1)^n$$
3. En déduire que pour tout n entier strictement positif, que a_n et b_n sont premier entre eux.

Date :

A rendre pour le **Jeudi 7 Février**.

Matrices stochastiques

En mathématiques, une matrice stochastique (aussi appelée matrice de Markov) est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne (ou colonne) vaut 1. Cela correspond, en probabilité, à la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie.

<u>MARKOV</u>

Mathématicien russe
(2 Juin 1856
20 juillet 1922)

<u>BEZOUT</u>

Mathématicien Français
(31 mars 1730
27 Spet 1783)

<u>GAUSS</u>

Mathématicien Allemand
(30 Avril 1777
23 Fevr 1855)