DM06 (Terminale S Spécialité)

Exercice

On note x_n le nombre de personnes dans la ville A l'année (2000+n) et y_n celui de la population de la ville B la même année.

D'une année à l'autre les populations évoluent de la façon suivante :

- $\frac{1}{5}$ de la population de A va s'installer en B
- $\frac{2}{5}$ de la population de B va s'installer en A

On considère qu'il n'y a pas de décès, de naissance ni d'autre déplacement.

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ l'état de la population l'année (2000+n)

On note les matrices carrées suivantes :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Traduire cette situation par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'équivalence : $X_{n+1} = AX_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$
3. Exprimer X_n en fonction de A^n et X_0
4. Vérifier que $A = PDQ$
5. Calculer PQ et QP
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$
7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
8. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de x_n et de y_n en fonction de n.
9. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.
10. Interpréter le résultat précédent.

Date :

A rendre pour le **Jeudi 1 Février**.