

## DM05 ( Terminale S Spécialité )

### Exercice

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.

L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », noté A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, noté B.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note pour la saison  $(2005+n)$  :

- $a_n$  la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A)
- $b_n$  la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B)
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  la matrice traduisant l'état probabiliste, avec  $a_n + b_n = 1$ .

Les résultats pour les probabilités seront arrondis à  $10^{-4}$

1. Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.
2. Déterminer la matrice M de transition de ce graphe.
3. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45 % des touristes. On a donc  $a_0 = 0,45$ 
  - a. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.
  - b. Déterminer la matrice  $P_2$  et interpréter ces résultats.
4. Démontrer que pour tout  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,15$
5. On note  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = a_n - \frac{3}{7}$ 
  - a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
  - b. Exprimer  $v_n$  puis  $a_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  et interpréter le résultat.
6. Soit  $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  tel que  $a+b=1$ . Déterminer a et b tels que  $P=M \times P$ .  
Interpréter le résultat.
7. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est de  $\frac{3}{7}$ . On interroge quatre touristes choisis au hasard. Les choix des touristes sont indépendants les uns des autres. Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

Date :

A rendre pour le  
**jeudi 17 Janvier.**



•  $2+0+1=3$

•  $2013=3 \times 11 \times 61$

• **2013 est un nombre déficient**

En mathématiques, un **nombre déficient** est un nombre entier naturel  $n$  qui est strictement supérieur à la somme de ses diviseurs stricts.

• **2013** a une autre particularité. **C'est la première année depuis 1987 où aucun chiffre ne se répète.** On vient de vivre vingt-cinq années consécutives qui contiennent au moins deux fois le même chiffre (1988, 1989, ..., 2011, 2012).