DM04 (Terminale S Spécialité)

Exercice 01

On note n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, alors
$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 11(9^n - 2^n) - 18(9^{n-1} - 2^{n-1})$$
2. On souhaite prouver la propriété "$P(n)$: $3^{2n} - 2^n$ *est divisible par* 7" pour tout $n \geq 1$.
   a. Montrer que $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.
   b. On suppose que $P(n\text{-}1)$ et $P(n)$ sont vraies pour un $n \geq 1$ fixé. Démontrer qu'alors $P(n+1)$ est aussi vraie.
   c. Conclure.

Exercice 02

n désigne un entier naturel non nul.

1. Pour n allant de 1 à 6 calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que, pour tout n non nul, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. Que peut-on en déduire que le reste de la division de 3^{n+6} par 7 et le reste de la division de 3^n par 7 ?
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7
4. En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7
5. On note $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, avec n un entier et $n \geq 2$
   a. Montrer que si u_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
   b. Montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors u_n est divisible par 7.
   c. En déduire les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

Exercice 03

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $N = 2^{2^{6n+2}}$ est un multiple de 16.

1. Vérifier pour n=0.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel k tel que : $2^{6n} = 1 + 9k$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, l'entier $N = 2^{2^{6n+2}}$ est un multiple de 16.

Date :

A rendre pour le **jeudi 22 Novembre**.

Symboles

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}$$

Johann Carl Friedrich Gauss

Mathématicien Allemand (**1777-1855**). Gauss a introduit la notion de congruence vers 1801

Congruences

Si $a \equiv a' \, [n]$

et $b \equiv b' \, [n]$

alors

$$a + b \equiv a' + b' \, [n]$$

$$a - b \equiv a' - b' \, [n]$$

$$ka \equiv ka' \, [n], k \in \mathbb{Z}$$

$$a \times b \equiv a' \times b' \, [n]$$

$$a^p \equiv a'^p \, [n], p \in \mathbb{N}$$