DM03 (Terminale S Spécialité)

Exercice 01

On note a, b, c trois entiers naturels et $S = a^3 + b^3 + c^3$

1. Démontrer que pour tout a, b, c entiers naturels
$$S - a - b - c = (a-1)a(a+1) + (b-1)b(b+1) + (c-1)c(c+1)$$
2. En déduire que si la somme $a+b+c$ est divisible par 6 alors S l'est aussi.
3. Déterminer une somme de trois cubes qui est divisible par 6.

Exercice 02

En base 10, un nombre s'écrit $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ où les a_k sont des chiffres dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

On note $N = \frac{1}{10}(x - a_0) + 7a_0$

1. Démontrer que $N = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\right) + 7a_0 = \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_{r+1} 10^r\right) + 7a_0$
2. Si N est divisible par 23, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\sum_{r=0}^{n-1} a_{r+1} 10^r = 23k - 7a_0$$
3. En déduire que $x = 230k - 69a_0$
4. En déduire que x est divisible par 23
   On vient de démontrer la propriété : Un nombre x est divisible par 23 si le nombre N obtenu en supprimant le chiffre des unités et en ajoutant ensuite 7 fois ce chiffre, est un nombre divisible par 23.
5. Démontrer que x=283935 est divisible par 23 sans effectuer de division.

Exercice 03

1. Démontrer par disjonction de cas que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n^2+2) \equiv 0\,[3]$
2. Démontrer que la somme des cubes de 3 entiers naturels consécutifs, est divisible par 9.

Exercice 04

Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec n un entier naturel.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$
2. Ecrire un programme (Algobox ou Ti82) donnant les 20 premiers nombres de Fermat.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$
4. Démontrer par récurrence qu'à partir du rang 2 que $F_n \equiv 7\,[10]$ (Le chiffre des unités est donc toujours 7)

Date :

A rendre pour le **jeudi 15 Novembre**.

Symboles

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n$$

Pierre Fermat

Né entre 1601 et 1607
mort en 1665

Mathématicien français.

Nombre de Fermat

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

où n est un entier naturel. On démontrera plus tard que si $m \neq n$ alors F_m et F_n sont premiers entre eux (le seul diviseur commun est 1).
Ils sont impairs et à partir du rang 2 ils se terminent tous par 7. Les 5 premiers nombres de Fermat sont des nombres premiers.