

DM01 (Terminale S Spécialité)

Exercice 01

Nous souhaitons démontrer le propriété ci-dessous :

La racine carrée d'un entier naturel qui n'est pas un carré parfait, est irrationnel.

On note a un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.
(On va faire un raisonnement par l'absurde.)

On suppose que \sqrt{a} est un nombre rationnel.

1. Démontrer qu'il existe deux uniques entiers naturels p et q avec $q \neq 0$, p et q n'ayant pas de diviseurs communs (sauf 1) tels que :

$$p^2 = aq^2$$

2. On note n le plus grand des entiers inférieur à \sqrt{a} . On note $p' = aq - np$ et $q' = p - nq$. Démontrer que $p'^2 - aq'^2 = 0$

3. Que peut-on alors dire des fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$?

4. a. Si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible, que peut-on dire de q' par rapport à q ?

b. Explique pourquoi dans l'exercice q' n'est pas un multiple de q ?

5. Conclure

Exercice 02

On souhaite montrer que le nombre d'or n'est pas un nombre rationnel.

On note $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or bien connu. On va faire un raisonnement par

l'absurde en supposant que ϕ est un nombre rationnel.

1. Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$
2. Démontrer qu'il existe deux entiers naturels p et q avec $q \neq 0$, p et q n'ayant pas de diviseurs communs (sauf 1) tels que :

$$p^2 - q^2 = pq$$

3. Démontrer que si un nombre entier est pair alors son carré est pair.
4. Ecrire la contraposée de la propriété précédente.
5. Si p et q sont tous les deux impairs, de quelle parité sont :

$$pq, p^2, q^2, p^2 - q^2$$

6. Etudier de même le cas où p est pair et q est impair, puis le cas où p est impair et q est pair.

7. Que peut-on en déduire sur la nature du nombre ϕ ?

Date :

A rendre pour le
jeudi 20 Septembre.

Indications :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut se mettre sous forme de fraction $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers naturels, $q \neq 0$, p et q n'ayant pas de diviseurs communs sauf 1. La fraction est donc irréductible.

Nombre d'or

L'histoire de cette proportion commence à une période reculée de l'antiquité grecque. À la Renaissance, **Luca Pacioli**, un moine franciscain italien, la met à l'honneur dans un manuel de mathématiques et la surnomme **divine proportion**. Au cours des XIXe et XXe siècles naissent les termes de **section dorée** et de **nombre d'or**.

Le nombre d'or se trouve parfois dans la nature ou des œuvres humaines, comme dans les capitules du tournesol ou dans certains monuments mais aussi dans les proportions du corps humain.