CH04F01 : Matrices inversibles

Exercice :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \text{ et } Q=\frac{1}{4}(I_3+P)$$

1. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P
2. Calculer les produits $(4I_3-P)Q$ et $Q(4I_3-P)$
3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n vérifiant
$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+b_n \end{cases} \text{ avec } a_0=1 \text{ et } b_0=0$$
4. En déduire a_n en fonction de n
5. Justifier que pour tout entier n, non nul, $\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n$
6. En déduire que pour tout entier n : $b_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$
7. Donner alors l'expression, sous forme matricielle, de Q^n en fonction de n.
8. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par :
$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{4}(2x_n+y_n+z_n) \\ y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+2y_n+z_n) \\ z_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+y_n+2z_n) \end{cases} \text{ avec } x_0=1 \text{ et } y_0=z_0=0$$
$$\text{On pose } U_0=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$
   a. Déterminer U_0 et U_1
   b. Vérifier que, pour tout entier n : $U_{n+1}=QU_n$
   c. Montrer que pour tout entier n : $U_n=Q^nU_0$
   d. En déduire l'écriture de x_n, y_n, z_n en fonction de n.
   e. En déduire leur limite lorsque n tend vers $+\infty$

En mathématiques et plus particulièrement en algèbre linéaire, une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** ou **régulière** ou encore **non singulière**, s'il existe une matrice B d'ordre n telle que

$$AB = BA = I_n,$$

où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

La multiplication est la multiplication ordinaire des matrices.

Dans ce cas, la matrice B est unique et est appelée la matrice **inverse** de A, et est notée A^{-1}.

Une matrice carrée qui n'est pas inversible est dite **non inversible** ou **singulière**.