TP04 : Suite de Fibonnacci (Page 01)

Enoncé du problème :
Le problème des lapins fut proposé en 1202 par **Fibonacci** (Léonard de Pise). Possédant au départ un couple de lapins, combien de lapins obtient-on en n mois ($n \in \mathbb{N}^*$) si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?
On note F_n le nombre de couples de lapins au n-ième mois de telle sorte que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

I. Préliminaires :

1. Faire un arbre représentant l'évolution des couples pour 5 mois.
2. Déterminer F_2, F_3, F_4 et F_5
3. Déterminer une relation entre F_{n+2}, F_{n+1} et F_n
4. On note φ (Nombre d'or) la solution positive de $x^2 = x + 1$ et $\overline{\varphi}$ la solution négative de cette même équation.
   a. Déterminer la valeur exacte de φ et de $\overline{\varphi}$
   b. Montrer que $\varphi - \overline{\varphi} = \sqrt{5}$ et que $\frac{1}{\varphi} = -\overline{\varphi}$
   c. Vérifier que $\varphi = 1\varphi + 0$ et $\varphi^2 = \varphi + 1$ puis que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$
   d. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = a_n\varphi + b_n$$
   e. Déterminer une relation de récurrence entre
   $$a_{n+2}, \; a_{n+1} \text{ et } a_n$$

On souhaite maintenant trouver une expression de F_n en fonction de n.

II. Etude de la suite de Fibonacci (Méthode avec matrices)

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$
3. On note $P = \begin{pmatrix} \varphi & \overline{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Démontrer que P est inversible.
   b. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{\varphi - \overline{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$
4. Montrer que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$
5. Déterminer A en fonction de P, D et P^{-1}
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n
7. Déterminer F_n en fonction de n.

Histoire

Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage « Leonardo Pisano » (il est encore actuellement connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise »)

La **suite de Fibonacci** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ (phi). Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. Inversement, la suite de Fibonacci intervient dans l'écriture des réduites de l'expression de φ (phi) en fraction continue : les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations du nombre d'or.

TP04 : Suite de Fibonnacci (Page 02)

III. Etude de la suite de Fibonacci (Méthode avec suites)

1. On note (U_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$U_n = F_{n+1} - \varphi F_n$$
   a. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \overline{\varphi}\, U_n$
   b. Calculer U_0
   c. En déduire U_n en fonction de n
   d. En déduire une relation entre F_{n+1} et F_n
2. On note (V_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$V_n = (\varphi - \overline{\varphi})F_n + \left(\overline{\varphi}\right)^n$$
   e. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \varphi\, V_n$
   f. Calculer V_0
   g. En déduire V_n en fonction de n
   h. En déduire l'expression de F_n en fonction de n.

IV Etude de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, $F_n \neq 0$
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{\varphi}^n$
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

V Algorithmes

1. Ecrire un algorithme qui calcule à partir de quel mois
$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \varphi \right| \leq 10^{-2}$$
2. Ecrire un algorithme qui calcule à partir de quel mois le nombre de couple de lapins va dépasser 1000.

Histoire

Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage « Leonardo Pisano » (il est encore actuellement connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise »)

La **suite de Fibonacci** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ (phi). Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. Inversement, la suite de Fibonacci intervient dans l'écriture des réduites de l'expression de φ (phi) en fraction continue : les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations du nombre d'or.