Niveau :

Terminale S Spé Maths

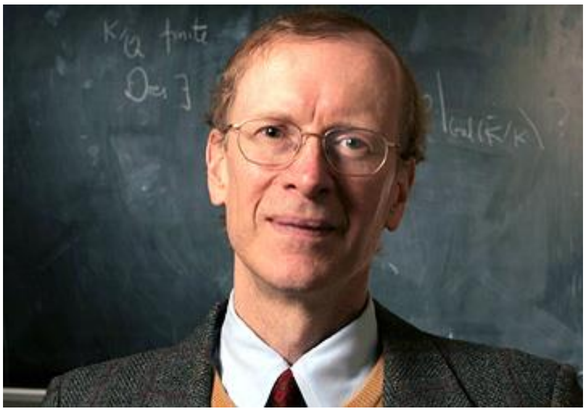
Titre Cours :

Etude de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (Partie IV)

Equations Diophantiennes

Année :

2014-2015



(Andrew Wiles 1953)

Il est surtout connu pour avoir démontré **le dernier théorème de Fermat en 1994**, résolvant ainsi l'un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques.

« Je ai eu ce rare privilège d'être en mesure de poursuivre dans ma vie d'adulte, ce qui avait été mon rêve d'enfance.» (Andrew Wiles)

I. Définition

1. Définition

Définition

Une équation diophantienne est une équation à coefficients entiers et dont les inconnues sont des entiers. Cette année, de terminale, nous ne résolvons que les équations de la forme $ax+by=k\times PGCD(a,b)$

Exemple historique :

Théorème de Fermat (Conjecturé par **Fermat** et démontré par **Wiles**)

Si $n\in\mathbb{N}$, $n>2$, il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que

$$x^n+y^n=z^n$$

2. Exemples de l'année de terminale

- $5x+7y=1$
- $6x+15y=3$
- $5x-8y=2$
- Trouver les points de coordonnées entières sur la droite d'équation $2y=3x+1$

II. Méthode de résolution

1. Méthode théorique

On souhaite résoudre l'équation diophantienne

$$ax+by=k\times PGCD(a,b) \qquad (E)$$

- **Première étape :** Recherche d'une solution particulière de (E)

  On calcule le $PGCD(a,b)$ par l'algorithme d'Euclide.

  On cherche une solution particulière (x_1,y_1) telle que

  $$ax_1+by_1=PGCD(a,b)$$

  Le couple $(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$ est donc une solution particulière de (E)

  On note (x_0,y_0) ce couple

- **Deuxième étape :** Recherche de toutes les solutions de (E)

  On note (x,y) un couple solution donc

  $$ax+by=k\times PGCD(a,b)$$

  (x_0,y_0) est une solution particulière de (E) donc

  $$ax_0+by_0=k\times PGCD(a,b)$$

  Par soustraction des deux équations, on obtient :

  $$a(x-x_0)+b(y-y_0)=\ldots\ldots$$

  On a donc $a(x-x_0)=b(y_0-y_0)$ et en divisant par $PGCD(a,b)$

  on obtient que $a'(x-x_0)=b'(y_0-y_0)$ avec $PGCD(a,b')=1$

  On a alors $b'|a'(x-x_0)$ avec a' et b' premiers entre eux.

  D'après le théorème de Gauss : $b'|(x-x_0)$ donc il existe un entier relatif δ tel que $x=x_0+\delta b'$

  de plus $a'(x-x_0)=b'(y_0-y)\Leftrightarrow a'b'\delta=b'(y_0-y)\Leftrightarrow y=y_0-a'\delta$

  On obtient donc $S=\left\{\left(x_0+\delta b',y_0-a'\delta\right),\delta\in\mathbb{Z}\right\}$

- **Vérification :**

  $ax+by=a(x_0+\delta b')+b(y_0-a'\delta)=ax_0+by_0+\delta ab'-\delta ba'$

  or $a=PGCD(a,b)\times a'$ et $b=PGCD(a,b)\times b'$ donc $\delta ab'-\delta ba'=0$

  De plus $ax_0+by_0=k\times PGCD(a,b)$

  Donc $ax+by=k\times PGCD(a,b)$

2. Exemples

- $5x+7y=1$

- $6x+15y=3$

- $5x-8y=2$

- Trouver les points de coordonnées entières sur la droite d'équation $2y=3x+1$