

Niveau :

Terminale S Spé Maths

Titre Cours :Etude de \mathbb{N} et \mathbb{Z} (Partie II)
PGCD-PPCM**Année :**

2014-2015



(Etienne BEZOUT 1730-1883)

« Dans l'arithmétique de l'Amour, un plus un égal l'infini,
et deux moins un égal zéro..»

(Mignon McLaughlin : Journaliste Américain)

I. PGCD et PPCM de deux entiers relatifs**1. Définition****Définition :**On note $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

- Le $PGCD(a,b)$ est le plus grand diviseur commun de a et b
- Le $PPCM(a,b)$ est le plus petit multiple commun de a et b

Exemples : Déterminer $PGCD(21,35)$ et $PPCM(21,35)$ **Définition :** Nombres étrangers ou premiers entre eux a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow PGCD(a,b) = 1$.

Le seul diviseur commun positif est 1.

Exemples : Montrer que 22 et 65 sont premiers entre eux.

Exercice : On note a, b, u et v des entiers relatifs non nuls tels que $au + bv = 1$. Montrer que a et b sont premiers entre eux.

2. Méthodes de calcul du PGCD

a. Liste des diviseurs

Il suffit de faire la liste des diviseurs des deux nombres et de trouver le plus grand des diviseurs communs.

Exemples : $PGCD(12, 18)$

b. Algorithme d'Euclide

On effectue des divisions euclidiennes successives en prenant à chaque fois le diviseur et le reste de la division précédente.

$$\begin{array}{ll}
 a = bq_1 + r_1 & \text{avec } 0 \leq r_1 < b \\
 b = r_1q_2 + r_2 & \text{avec } 0 \leq r_2 < r_1 \\
 r_1 = r_2q_3 + r_3 & \text{avec } 0 \leq r_3 < r_2 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & \text{avec } 0 \leq r_n < r_{n-1}
 \end{array}$$

Que peut-on dire de la suite des restes $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Où trouve-t-on le PGCD dans cette suite ?

Exemples : $PGCD(1071, 1029)$

Théorème :

On note $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b, \text{MOD}(a,b))$$

Où $\text{MOD}(a,b)$ est le reste de la division euclidienne de a par b .

Démonstration :

- Montrer que si $d|a$ et $d|b$ alors $d|b$ et $d|\text{MOD}(a,b)$

- Montrer que si $d|\text{MOD}(a,b)$ et $d|b$ alors $d|b$ et $d|a$

- Conclure

c. Algorithme des soustractions

On effectue des soustractions successives.

$$a - b = r_1$$

$$\text{Si } b < r_1 \quad b \rightarrow c \quad r_1 \rightarrow b \quad c \rightarrow r_1 \quad \text{et } b - r_1 = r_2$$

$$\text{Si } r_1 < r_2 \quad r_1 \rightarrow c \quad r_2 \rightarrow r_1 \quad c \rightarrow r_2 \quad \text{et } r_1 - r_2 = r_3$$

$$\vdots$$

$$\text{Si } r_{n-2} < r_{n-1} \quad r_{n-2} \rightarrow c \quad r_{n-1} \rightarrow r_{n-2} \quad c \rightarrow r_{n-1} \quad \text{et } r_{n-2} - r_{n-1} = r_n$$

Que peut-on dire de la suite des restes $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Où trouve-t-on le PGCD dans cette suite ?

Exemples : $PGCD(1071,1029)$

Théorème :

On note $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

$$PGCD(a,b) = PGCD(b, a-b)$$

Démonstration :

- Montrer que si $d|a$ et $d|b$ alors $d|b$ et $d|a-b$

- Montrer que si $d|a-b$ et $d|b$ alors $d|b$ et $d|a$

- Conclure

d. Décomposition en facteurs premiers

Exemple $a = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ et $b = 2^1 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

3. Méthodes de calcul du PPCM

a. Liste des multiples

Exemple : $PPCM(6,4)$

b. Décomposition en facteurs premiers

Exemple : $PPCM(2^3 \times 3^1, 2^2 \times 3^2 \times 5^3)$

c. Formule reliant le PGCD et le PPCM

Théorème : a et b sont deux entiers relatifs non nuls

$$PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = ab$$

Démonstration : Voir plus tard avec les nombres premiers et la démonstration des entiers en produits de nombres premiers.

Exemple : $PPCM(21,35)$

Conclusion :

- Tous les restes sont donc dans D donc $p \in D$ et $p \geq \dots$
- Conclusion :

$$\begin{cases} p \leq \dots \\ p \geq \dots \end{cases} \Rightarrow p = \dots$$

2. Propriété de BEZOUT**Propriété de BEZOUT**

a et b sont premiers entre eux

\Leftrightarrow

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$

Démonstration :

3. Théorème de GAUSS

Théorème de GAUSS

a, b et c sont des entiers relatifs non nuls

$$a \mid bc \text{ et } \text{PGCD}(a,b)=1 \Rightarrow a \mid c$$

Démonstration :

III. Applications (voir fiches d'exercices)

1. Carte Vitale
2. Carte Bleue
3. Code ISBN
4. Etc ...

GAUSS



BEZOUT

