Niveau :

Terminale S Spé Maths

Titre Cours :

Etude de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (Partie II)

Congruences

Année :

2014-2015

(Carl Friedrich GAUSS 1777-1855)

« La mathématique est la reine des Sciences, mais la théorie des nombres est la reine des sciences mathématiques.» (GAUSS)

I. Congruence dans $\mathbb{Z}$

1. Définition

Définition

On note $n \geq 2$ un entier naturel et a et b deux entiers relatifs. On dit que a et b sont congrus modulo n et on note $a \equiv b\,[n]$ si la différence $a-b$ est un multiple de n ou si $n \mid (a-b)$

Exemples : $33 \equiv 13\,[5]$ $\quad 29 \equiv -121\,[5]$ $\quad -623 \equiv 17\,[10]$ $\quad 11 \equiv -1\,[12]$

2. Propriétés

On note n et n' deux entiers naturels ≥ 2 et a et b deux entiers relatifs.

Propriété 01

$$a \equiv 0\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad n \mid a$$

Démonstration :

Propriété 02

Si $n' \mid n$ alors $a \equiv b\,[n] \quad \Rightarrow \quad a \equiv b\,[n']$

Démonstration :

Propriété 03

$a \equiv b\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad$ les divisions euclidiennes de a et b par n ont le même reste.

Démonstration :

II. Congruences et opérations

On note a, a', b et b' quatre entiers relatifs quelconques.

1. Addition.

$$\begin{cases} a \equiv a' \, [n] \\ b \equiv b' \, [n] \end{cases} \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \, [n]$$

Démonstration :

2. Soustraction.

$$\begin{cases} a \equiv a' \, [n] \\ b \equiv b' \, [n] \end{cases} \Rightarrow a - b \equiv a' - b' \, [n]$$

Démonstration :

3. Produit par un entier relatif.

$$\begin{cases} a \equiv a' \, [n] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ka \equiv ka' \, [n]$$

Démonstration :

4. Produit.

$$\begin{cases} a \equiv a' \, [n] \\ b \equiv b' \, [n] \end{cases} \Rightarrow a \times b \equiv a' \times b' \, [n]$$

Démonstration :

5. Puissance d'un entier naturel.

$$\begin{cases} a \equiv a' \, [n] \\ p \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^p \equiv a'^p \, [n]$$

Démonstration :

III. Critères de divisibilité

On note x un nombre entier naturel.

On note $n=\overline{a_p a_{p-1}....a_3 a_2 a_1 a_0}$ son écriture en base 10.

1. Critère de divisibilité par 2

Démontrer que $2|\, n \Leftrightarrow a_0 \in \{0,2,4,6,8\}$

Ecrire un critère de divisibilité par 2 à l'aide d'une phrase.

2. Critère de divisibilité par 3

Démontrer que $3|\, n \Leftrightarrow 3|\, \sum_{k=0}^{p} a_k$

Ecrire un critère de divisibilité par 3 à l'aide d'une phrase.

3. Critère de divisibilité par 9

Démontrer que $9|\, n \Leftrightarrow 9|\, \sum_{k=0}^{p} a_k$

Ecrire un critère de divisibilité par 9 à l'aide d'une phrase.

4. Critère de divisibilité par 4

Démontrer que $4|\, n \Leftrightarrow 4|\,(10a_1 + a_0)$

Ecrire un critère de divisibilité par 4 à l'aide d'une phrase.

5. Critère de divisibilité par 5

Démontrer que $5 | n \Leftrightarrow a_0 \in \{0,5\}$

Ecrire un critère de divisibilité par 5 à l'aide d'une phrase.

6. Critère de divisibilité par 10

Démontrer que $10 | n \Leftrightarrow a_0 = 0$

Ecrire un critère de divisibilité par 10 à l'aide d'une phrase.

7. Critère de divisibilité par 7

Démontrer que $7 | n \Leftrightarrow 7 | (\overline{a_p a_{p-1} ... a_3 a_2 a_1} - 2a_0)$

Ecrire un critère de divisibilité par 7 à l'aide d'une phrase.

8. Critère de divisibilité par 11

a. Trouver, suivant les valeurs de *k*, les valeurs de m sachant que $10^k \equiv m[11]$

b. Si p est pair démontrer que

$$11 | n \Leftrightarrow 11 | [(a_0 + a_2 + ... + a_p) - (a_1 + a_3 + ... + a_{p-1})]$$

c. Si p est impair démontrer que

$$11 | n \Leftrightarrow 11 | [(a_0 + a_2 + ... + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + ... + a_p)]$$

Ecrire un critère de divisibilité par 11 à l'aide d'une phrase.