Niveau :

Terminale S Spé Maths

Titre Cours :

Etude de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (Partie I)

Année :

2014-2015

(Léopold Kronecker 1823-1891)

« Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme» (Kronecker)

I. Quelques rappels

1. L'ensemble des entiers naturels

a. Définition

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;6;......\}$$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

b. Stabilité

Propriété 01

$\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication seulement.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, ... et ....

Par contre $\mathbb{N}$ n'est pas stable pour la soustraction et la division.

Exemples

- $(+1)-(+3)$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$
- $\dfrac{+1}{+3}$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$

c. Quelques axiomes

Le mot **axiome** vient du grec $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ (axioma), qui signifie "qui est considéré comme digne ou convenable" ou "qui est considéré comme **évident en soi**". Pour certains philosophes grecs de l'antiquité cela représentait une affirmation qu'ils considéraient comme évidente et qui n'avait nul besoin de preuve.

Axiome 01 :
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet …………………………………..........

Axiome 02 :
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet ………………………..

Axiome 03 :
Toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est …………

2. L'ensemble des entiers relatifs

a. Définition

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;\ldots\ldots\}$$

b. Propriétés

Propriété 02 :

$\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication seulement.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z},$ ...., ... et ....

Par contre $\mathbb{Z}$ n'est pas stable pour la division.

Propriété 03 :

Tout nombre entiers relatif, admet un opposé entier relatif

$\forall n \in \mathbb{Z},$ ....

Propriété 04 :

Tout entier naturel est un entier relatif. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{N},$ ....

Exemples

- $\dfrac{-1}{+3}$ n'existe pas dans $\mathbb{Z}$

c. Quelques axiomes

Dans $\mathbb{Z}$, l'axiome 01 et l'axiome 03 sont faux mais par contre l'axiome 03 reste vrai.

Axiome 03 bis :
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément

II. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Multiple d'un entier.

On note n et m deux entiers relatifs

Définition :

On dit que ***m*** **est un multiple de** ***n*** si et seulement si il existe un entier relatif k tel que ....

Exemples :

- Les multiples de 7 sont $\{\ldots;-21;-14;-7;0;7;14;21;\ldots\}$
- Les multiples de - 2 sont $\{\ldots;-6;-4;-2;0;2;4;6;\ldots\}$

2. Diviseur d'un entier

On note n et m deux entiers relatifs avec $n \neq 0$

Définition :

On dit que ***n*** **est un diviseur de** ***m*** (ou **que** ***n*** **divise** ***m***) si et seulement si il existe un entier relatif k tel que .... (m est un multiple de n)

Exemple :

- Les diviseurs de 12 sont $\{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

Notation :

On notera $n \mid m$ pour dire que n divise m

Quelques remarques :

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \mid n$ et $-1 \mid n$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \mid 0$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, n admet au moins quatre diviseurs $\{-n;-1;1;n\}$

3. Propriétés sur la divisibilité.

Propriété 05

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \quad b \mid a \Rightarrow -b \mid a$$

Démonstration :

Propriété 06

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \quad b \mid a \text{ et } a \neq 0 \Rightarrow |b| \leq |a|$$

Démonstration :

Propriété 07

$$\forall a \in \mathbb{Z}^*, \forall b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z}, \quad b \mid a \text{ et } a \mid c \Rightarrow b \mid c$$

Démonstration :

Propriété 08

$$\forall a \in \mathbb{Z}^*, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \quad b \mid a \text{ et } a \mid b \Rightarrow a = -b \text{ ou } a = b$$

Démonstration :

Propriété 08

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \quad b \mid a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z}, b \mid ac$$

Démonstration :

Propriété 09

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, c \in \mathbb{Z}, \quad b \mid a$ et $b \mid c \Rightarrow \forall u \in \mathbb{Z}, \forall v \in \mathbb{Z}, \quad b \mid au + cv$

On dit que si $b \mid a$ et $b \mid c$ alors b divise toute combinaison linéaire de a et de c.

Démonstration :

Propriété 10

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \quad b \mid a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z}^*, bc \mid ac$$

Démonstration :

III. La division Euclidienne dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1. La division euclidienne dans $\mathbb{N}$

a. Théorème

On note $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

Théorème

Il existe un couple unique (q,r) d'entiers naturels tels que

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

On dit alors que q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de b par a.

Démonstration

Existence

On note $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ nb \leq a\}$

- $\ldots\ldots \times b = 0 \leq a$ donc $\ldots\ldots \in E$ donc E n'est pas vide
- E est donc une partie **non vide et majorée** de $\mathbb{N}$ donc d'après l'axiome 03 alors E admet un plus grand élément que l'on nomme q

  On nomme $r = a - qb$ on a donc $a = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots$

  De plus $q \in E$ donc $qb \ldots\ldots a \Leftrightarrow a - qb \ldots\ldots 0$

  De plus $q + 1 \notin E$ donc $(q+1)b \ldots\ldots a \Leftrightarrow a - qb \ldots\ldots b$

  Conclusion : Il existe un couple (q,r) d'entiers naturels tels que

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

Unicité

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux couples (q,r) et (q',r') d'entiers naturels tels que :

- $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$
- $a = bq' + r'$ avec $0 \leq r' < b$

  Par soustraction des deux égalités on obtient : $0 = b(\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots)$ donc $r - r' = b(\ldots\ldots\ldots)$ donc b divise $r - r'$.

- $0 \leq r' < b$ donc $\ldots\ldots < -r' \leq \ldots\ldots$ donc $\ldots\ldots < r - r' < \ldots\ldots$

  Or le seul multiple de b dans $]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Conclusion :

b. Exemples

$17 = 5 \times 3 + 2$

3 est le quotient et 2 le reste de la division euclidienne de 17 par 5

5 est le quotient et 2 le reste de la division euclidienne de 17 par 3

2. Le division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

a. Théorème

On note $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

Théorème

Il existe un couple unique (q,r) d'entiers relatifs tels que

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|$$

Remarque : r est toujours positif

On dit alors que q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de b par a.

Démonstration

Existence

On note $E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n|b| \leq a\}$

- Si $a \geq 0$ alors ....$\times |b| = 0$ donc $\ldots\ldots \in E$ donc E n'est pas vide

  Si $a < 0$ alors $a|b| \leq a$ donc $\ldots\ldots \in E$ donc E n'est pas vide.
- E est donc une partie **non vide et majorée** (par a ou 0 suivant le signe de a) de $\mathbb{Z}$ donc d'après l'axiome 03 alors E admet un plus grand élément que l'on nomme q

  On nomme $r = a - q|b|$ on a donc $a = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots$
  - Si $b > 0$ alors $a = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots$
  - Si $b < 0$ alors $a = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots$

  De plus $q \in E$ donc $q|b| \ldots\ldots a \Leftrightarrow a - q|b| \ldots\ldots 0$

  De plus $q+1 \notin E$ donc $(q+1)|b| \ldots\ldots a \Leftrightarrow a - q|b| \ldots\ldots |b|$

  Conclusion : Il existe un couple (q,r) d'entiers naturels tels que

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|$$

Unicité

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux couples (q,r) et (q',r') d'entiers relatifs tels que :

- $a=bq+r$ avec $0 \le r < |b|$
- $a=bq'+r'$ avec $0 \le r' < |b|$

  Par soustraction des deux égalités on obtient : $0=b(\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots)$

  donc $r-r'=b(\ldots\ldots\ldots)$ donc b divise $r-r'$.
- $0 \le r' < |b|$ donc $\ldots\ldots < -r' \le \ldots\ldots$ donc $\ldots\ldots < r-r' < \ldots\ldots$

  Or le seul multiple de b dans $]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ est ....

  Conclusion :

b. Exemples

- $-17=-5\times 4+3$ 4 est le quotient et 3 le reste de la division euclidienne de -17 par -5.
- $-126=-7\times 18+0$

3. Application au changement de système de numération.

En base 10 (**<u>système décimal</u>**, le système de numération que l'on utilise) les nombres s'expriment à l'aide des puissances de 10 et des chiffres

$$\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Exemples :

$$126=1\times 10^2+2\times 10^1+6\times 10^0$$

Théorème :

Pour tout $m\in\mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$m=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\ldots+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k 10^k$$

Où la suite (a_n) est une suite d'éléments de $\{0;\ldots;8;9\}$

On peut écrire m, en base 2 (**<u>système binaire</u>**), en base 3 (**<u>système trinaire</u>**), en base 16 (**<u>système hexadécimal</u>**), en base 60 (**<u>système sexagésimal</u>** : système horaire), etc…

La base 2 (**<u>système binaire</u>**) avec les chiffres 0 et 1, est souvent utilisé en électronique et en informatique. (le courant passe ou ne passe pas)

La base 16 (**<u>système hexadécimal</u>**) est souvent utilisée en informatique(Exemple : le codage des couleurs des écrans) .
Les chiffres de ce système sont : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A;B;C;D;E;F\}$

- Dans le système binaire, les nombres s'écrivent sous la forme :

$$\overline{m}^{2}=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\ldots+a_2\times 2^2+a_1\times 2+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k 2^k$$

Où la suite (a_n) est une suite d'éléments de $\{0;1\}$

- Dans le système hexadécimal, les nombres s'écrivent sous la forme :

$$\overline{m}^{16}=a_n\times 16^n+a_{n-1}\times 16^{n-1}+\ldots+a_2\times 6^2+a_1\times 16+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k 16^k$$

Où la suite (a_n) est une suite d'éléments de

$$\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;A;B;C;D;E;F\}$$

a. Comment passer du système décimal à un autre système de numération ?

<u>Exemples :</u>

On souhaite écrire le nombre 234 en base 2.

234 = **117** × 2 + 0 **117** = **58** × 2 + 1 **58** = **29** × 2 + 0 **29** = **14** × 2 + 1 **14** = **7** × 2 + 0 **7** = **3** × 2 + 1 **3** = **1** × 2 + 1 **1** = **0** × 2 + 1	Lorsqu'on lit les restes du bas vers le haut, on obtient : $\overline{234}^{2}=11101010$

On souhaite écrire le nombre 111 en base 2.

	Lorsqu'on lit les restes du bas vers le haut, on obtient : $\overline{111}^{2}=$

b. Comment passer d'un système de numération au système binaire ?

Exemples :

- On souhaite écrire le nombre $\overline{1011}^{2}$ en base 10.
  Il suffit de développer l'écriture et de calculer :
  $\overline{1011}^{2} = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2 + 1 = 11$
- On souhaite écrire le nombre $\overline{111}^{2}$ en base 10.
  Il suffit de développer l'écriture et de calculer :
  $\overline{E3A}^{16} =$
- On souhaite écrire le nombre $\overline{101}^{2}$ en base 10.
  Il suffit de développer l'écriture et de calculer :
  $\overline{134}^{5} =$

c. Système de numération et opérations

Exemples :

Poser et effectuer les opérations suivants sans passer par la base 10 :

$\overline{122}^{3} + \overline{221}^{3}$

$\overline{34}^{5} \times \overline{24}^{5}$