CH00F03 : Démonstration par récurrence

Exercice 01 : (Ch00F03-07)

1. Démontrer directement puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

   b. Démontrer directement, à l'aide des questions 1 et 2, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 02 : (Ch00F03-07)

Pour les deux suites ci-dessous, calculer les premiers termes puis conjecturer une formule explicite de u_n puis la démontrer par récurrence.

1. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$
2. $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n$

Exercice 03 : (Ch00F03-07)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \geq n+1$$

2. On note x un réel positif.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 05 : (Ch00F03-07)

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$n^3 - n$ est un multiple de 3

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$n^5 - n$ est un multiple de 5

Exercice 06 : (Ch00F03-07)

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. En déduire la valeur de

$A = 1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3$

Exercice 07 : (Ch00F03-07)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Exercice 08 : (Ch00F03-07)

On note x et y deux réels.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x^{n+1} - y^{n+1} = y(x^n - y^n) + (x-y)x^n$$

2. Exprimer $x^k y^{n-k}$ en fonction de x si $k = n$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Evaluation

CH00F02-07			
AA	A	EA	NA

Vocabulaire

Démonstration par récurrence

Initialisation

On montre que la propriété est vraie pour le premier (ou les premiers) rang(s)

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie au rang n (ou tous les rangs jusqu'à n) et on démontre qu'alors elle est vraie au rang n+1

Conclusion

La propriété est vraie au(x) premier(s) rang (s) et elle se propage d'un rang au suivant alors elle est vraie pour tous les rangs.