CH00F02 : Directe, contraposée, disjonction et absurde

Exercice 01 : (Ch00F02-03)
1. Déterminer un polynôme de degré 3, de la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $P(x+1) - P(x) = x^2$. Où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$
2. En déduire l'expression de la somme suivante $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ en fonction du polynôme P et de n.
3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. En déduire rapidement les sommes :
   a. $1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2$
   b. $1^2 + 2^2 + \ldots + 50^2$
   c. $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$

Exercice 02 : (Ch00F02-03)
1. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$ est un nombre pair alors n^2 est un nombre pair.
2. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$ est un nombre impair alors n^2 est un nombre impair.

Exercice 03 : (Ch00F02-03)
Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, si $n^5 - n$ est un nombre multiple de 5 alors $(n+1)^5 - (n+1)$ est aussi un multiple de 5.

Exercice 04 : (Ch00F02-03)
1. On note q un nombre réel différent de 1 et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. En calculant S-qS, démontrer que $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. On note a et r des nombres réels, pour tout n entier naturel et $S = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Démontrer que $S = \frac{n[2a+(n+1)r]}{2}$

Exercice 05 : (Ch00F02-04)
Démontrer les propositions suivantes par la contraposée :
1. Si $x \in \mathbb{R}$ *avec* $x^2 < 1$ *alors* $x > -1$
2. $n \in \mathbb{N}, n$ *pair* $\Leftrightarrow n^2$ *pair*

Exercice 06 : (Ch00F02-04)
On note $n \in \mathbb{N}^*$
Le but est de démontrer par contraposition la propriété suivante :

$$n^2 - 1 \text{ non divisible par } 8 \Rightarrow n \text{ pair}$$

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 07 : (Ch00F02-05)
Démontrer par disjonction de cas, les propriétés suivantes :
1. $n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Rightarrow n(n+1) \text{ pair}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

Exercice 08 : (Ch00F02-06)

1. Démontrer par l'absurde la proposition suivante :
Si $a \in \mathbb{N}$ n'est pas un nombre premier, alors chaque division qui tombe juste $a = bc$ est telle que l'un des deux nombres b ou c est inférieur ou égal à $\sqrt{a}$

2. On admet le résultat suivant :
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Evaluation

CH00F02-03			
AA	A	EA	NA
CH00F02-04			
AA	A	EA	NA
CH00F02-05			
AA	A	EA	NA
CH00F02-06			
AA	A	EA	NA

Vocabulaire

Proposition

$A \Rightarrow B$

Contraposée

$non\, B \Rightarrow non\, A$

Absurde

Démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire.

Disjonction de cas
Etudier tous les cas possibles

Propriété

Si la contraposée est vraie alors la propriété directe l'est aussi.