

**Niveau :**

Terminale S Spé Maths

**Titre Cours :**Matrices, Matrices carrées et  
Evolution de processus**Année :**

2014-2015



(Cayley Hamilton)

«Pour inventer, il faut penser à côté.» (Paul Souriau)

**I. Définition****1. Définition**On note  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls**Une matrice** est un tableau de  $p$  lignes et  $q$  colonnes dont les coefficients sont des réels (voir des complexes dans les années futures)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, p\} \\ j \in \{1, \dots, q\}}}$$

Le coefficient  $a_{ij}$  est à l'intersection entre la ligne  $i$  et la colonne  $j$ **Une matrice carrée** est une matrice qui a le même nombre de ligne et le même nombre de colonne. On notera dans ce cas  $n$  le nombre de lignes et de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$$

Une **matrice ligne** est une matrice comportant une seule ligne.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

Une **matrice colonne** est une matrice comportant une seule colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

## 2. Exemples

### II. Opérations sur les matrices

#### 1. Somme de matrices de mêmes dimensions

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par  $C = A + B$

Alors pour tout i dans  $\{1, \dots, p\}$  et j dans  $\{1, \dots, q\}$  on a  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1q} + b_{1q} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2q} + b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & a_{p2} + b_{p2} & \dots & a_{pq} + b_{pq} \end{pmatrix}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

## 2. Multiplication d'une matrice par un réel

On note  $\lambda$  un réel.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

On note  $C = \lambda A$  la matrice  $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1q} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \lambda a_{p2} & \dots & \lambda a_{pq} \end{pmatrix}$

Alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, q\}$  on a  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ alors } -2A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

## 3. Différences de deux matrices de mêmes dimensions

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note  $C$  la matrice définie par  $C = A - B$

Alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, q\}$  on a  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1q} - b_{1q} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2q} - b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} - b_{p1} & a_{p2} - b_{p2} & \dots & a_{pq} - b_{pq} \end{pmatrix}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A - B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

#### 4. Multiplication d'une matrice ligne par une matrice $p \times q$

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1p}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par  $C = A \times B$

Alors pour tout j dans  $\{1, \dots, q\}$  on a  $c_{1j} = \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{kj}$

$$C = \left( \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1} \quad \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k2} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{kq} \right)$$

**Exemple :**

$$A = (2 \quad 5) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A \times B = (\dots \quad \dots)$$

#### 5. Multiplication d'une matrice $p \times q$ par une matrice colonne

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{q1} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par  $C = B \times A$

Alors pour tout i dans  $\{1, \dots, p\}$  on a  $c_{i1} = \sum_{k=1}^q b_{ik} a_{k1}$

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^q b_{1k} a_{k1} \\ \sum_{k=1}^q b_{2k} a_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^q b_{pk} a_{k1} \end{pmatrix}$$

**Exemple :**

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad B \times A = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

## 6. Multiplication de deux matrices quelconques

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qk} \end{pmatrix}$$

Pour pouvoir faire le produit, il faut absolument que le nombre de colonne de celle de gauche soit identique aux nombres de lignes de celle de droite.

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1q}b_{q1}) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p\}$   $j$  dans  $\{1, \dots, q\}$  et on a  $c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$

**Exemple :**

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } B \times A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

## 7. Multiplication de deux matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

On note  $C$  la matrice définie par  $C = A \times B$

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$   $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et on a  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

**Exemple :**

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } B \times A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

### III. Propriétés des opérations

#### 1. Addition

A et B sont deux matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $A + B = B + A$  (Commutative)
- $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$  (Associative)

#### 2. Multiplication par un réel

K est un réel, A et B sont deux matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $(k + k')A = kA + k'A$
- $K(A + B) = kA + kB$
- $(kk')A = k(k'A)$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

#### 3. Multiplication

A, B et C sont trois matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$  (Distributivité à gauche)
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$  (Distributivité à droite)
- **ATTENTION** : AB et BA ne sont pas toujours identiques
- $A^0 = I_n$
- $A^{k+1} = A^k \times A = A \times A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$

**IV. Matrices de transition dans un processus d'évolution**

**1. Définition**

Lorsqu'on s'intéresse au processus d'évolution de plusieurs données reliées entre elles par des relations linéaires, on peut déterminer le passage d'un état des données à un autre en utilisant une matrice de transition.

On note  $P_0$  la matrice représentant l'état initial de ce processus et donc souvent des états probabiliste (probabilité initial du processus).

**2. Matrice de transition dans le cas où la matrice de l'état initial est une matrice colonne**

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_0 \xrightarrow{\times M} P_1 \xrightarrow{\times M} P_2 \xrightarrow{\times M} P_3 \xrightarrow{\times M} P_4 \xrightarrow{\times M} P_5 \dots \xrightarrow{\times M} P_n$$

Et on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = M^n \times P_0$  ou  $P_n = M^{n-k} \times P_k$

**3. Matrice de transition dans le cas où la matrice de l'état initial est une matrice ligne**

$$P_0 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) \qquad M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_0 \xrightarrow{\times M} P_1 \xrightarrow{\times M} P_2 \xrightarrow{\times M} P_3 \xrightarrow{\times M} P_4 \xrightarrow{\times M} P_5 \dots \xrightarrow{\times M} P_n$$

Et on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = P_0 \times M^n$  ou  $P_n = P_k \times M^{n-k}$

## V. Matrices particulières

### 1. Matrices diagonales

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque : Que se passe t-il si on multiplie une matrice carrée par une matrice diagonale ?

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

### 2. Matrice unité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour toute matrice A carré de taille n :  $A \times I_n = I_n \times A = A$

Cette matrice a le même rôle que le nombre 1 dans la multiplication.