Divers raisonnements en mathématiques

(Spécialité Maths) Terminale S

Dernière mise à jour : Jeudi 4 Septembre 2008

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2007-2008)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Divers raisonnements en mathématiques

1.1 raisonnement par Contraposée

On note la proposition (P) vraie :

$$\text{Si } A \text{ est vraie alors } B \text{ est vraie ou } A \Rightarrow B.$$

Exemple : Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Définition :
La contraposée de (P) est la proposition vraie :

$$\boxed{\text{Si B n'est pas vraie alors A n'est pas vraie ou (Non } B) \Leftrightarrow \text{(Non } A)}$$

Exemple 1 :

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.
2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
3) Comment traduire ces deux propriétés en une seule ?

Correction :

1. Commençons par essayer de démontrer la propriété directe :
$$n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}.$$
Si n^2 est impair alors $\exists k \in \mathbb{N} \quad / \quad n^2 = 2k + 1$
Or $2k + 1$ est strictement positif donc :
$\exists k \in \mathbb{N} \quad / \quad n = \sqrt{2k + 1}$
Et là on doit montrer que la racine carré d'un impair est impair, ce qui n'est pas si simple.
Nous allons voir qu'il est plus simple de prouver la proposition contraposée :
$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}.$$
Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{N} \quad / \quad n = 2k$
donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
Or $2k^2$ est un entier naturel donc si on pose $2k^2 = m$ alors $\exists m \in \mathbb{N} \quad / \quad n^2 = 2m$
Donc n^2 est pair.
On a donc montré que la contraposée de "n^2 impair $\Rightarrow n$ impair" était vraie
donc la propriété "n^2 impair $\Rightarrow n$ impair" est vraie.
2. Montrons la propriété directe :
$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}.$$
Si n est impair alors $\exists k \in \mathbb{N} \quad / \quad n = 2k + 1$
donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
Or $2k^2 + 2k$ est un entier naturel donc si on pose $2k^2 + 2k = m$ alors $\exists m \in \mathbb{N} \quad / \quad n^2 = 2m + 1$
Donc n^2 est impair.
3. On a donc les deux propriétés : $\begin{cases} n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair} \\ n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair} \end{cases}$ se traduit par n impair $\Leftrightarrow n^2$ impair.

Exemple 2 :

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair $\Rightarrow n^2$ pair.
3) Comment traduire ces deux pripriétés en une seule ?

Correction :

1. Commençons par essayer de démontrer la propriété directe :
$$n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair.}$$
Si n^2 est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}/n^2 = 2k$
Or $2k$ est strictement positif donc :
$\exists k \in \mathbb{N}/n = \sqrt{2k} = \sqrt{2} \times \sqrt{k}$
Et là on doit montrer que $\sqrt{k}$ est de la forme $m\sqrt{2}$ avec $m \in \mathbb{N}$.
Nous allons voir qu'il est plus simple de prouver la proposition contraposée :
$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$$
Cette propriété est démontrée dans l'exercice 1. On a donc montré que la contraposée de "n^2 pair $\Rightarrow n$ pair" était vraie
donc la propriété "n^2 pair $\Rightarrow n$ pair" est vraie.
2. Montrons la propriété directe :
$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair.}$$
Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}/n = 2k$
donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
Or $2k^2$ est un entier naturel donc si on pose $2k^2 = m$ alors $\exists m \in \mathbb{N}/n^2 = 2m$
Donc n^2 est pair.
3. On a donc les deux propriétés : $\begin{cases} n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair} \\ n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair} \end{cases}$ se traduit par n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair.

1.2 Raisonnement par l'absurde

Définition :

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit à montrer la fausseté d'une proposition en en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

Exemple :
On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On va donc essayer de voir ce qu'il se passe si on considère que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Si $\sqrt{2}$ est rationnel alors il peut se mettre sous la forme d'une fraction est donc il existe deux entiers p et q ($q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $PGCD(p, q) = 1$ (p et q sont premiers entre eux).
Si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ alors $p = \sqrt{2} \times q$ donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est un nombre pair et donc p est pair.(voir § contraposée)
Puisque p est un nombre pair alors il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$
On a donc $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair et enfin q est pair.(voir § contraposée).
Or p et q ne peuvent pas être pairs tous les deux car p et q sont premiers entre eux donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel mais un irrationnel.

1.3 Raisonnement par récurrence

Les démonstration par récurrence servent à démontrer q'une propriété est vraie ou fausse pour tout les entiers à partir d'un certain rang.
Il faut donc avoir à démontrer quelque chose du genre :

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq k$, la propriété P_n est vraie.

Pour le démontrer, on va devoir prouver les deux étapes suivantes :

1. La propriété P_k est vraie (Initialisation).
2. Pour tout q telq que $k \leq q \leq n$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
   On dit dans ce cas que P_n a **un caractère héréditaire**.

On pourra alors conclure que P_n est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemples :

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n - 1$.
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :"$4^n - 1$ est un multiple de 3".
   Première étape (Initialisation) :
   $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 3.
   donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Deuxième étape (Caractère héréditaire) :
   (a) On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. C'est à dire que $4^n - 1$ est un multiple de 3.
   (b) Sachant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, démontrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi. C'est à dire que $4^{n+1} - 1$ st un multiple de 3.
   $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1 + 1) - 1 = 4(4^n - 1) + 4 - 1 = 4(4^n - 1) + 3$
   On sait que $4^n - 1$ est un mutiple de 3 donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 1 = 3k$.
   donc
   $4^{n+1} - 1 = 4(3k) + 3 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ avec $4k + 1 \in \mathbb{N}$ donc
   $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

   Conclusion :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :"$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".
   Première étape (Initialisation) :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$
   $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$
   donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Deuxième étape (Caractère héréditaire) :
   (a) On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. C'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) Sachant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, démontrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi.
C'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$
donc
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :"$0 \leq u_n \leq 3$".
Première étape (Initialisation) :
$u_0 = 0$
donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Deuxième étape (Caractère héréditaire) :

(a) On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. C'est à dire que $0 \leq u_n \leq 3$

(b) Sachant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, démontrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi.
C'est à dire que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$
$0 \leq u_n \leq 3$
donc $6 \leq u_n + 6 \leq 9$
Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc
$0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{9}$
donc
$0 \leq u_{n+1} \leq 3$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

1.4 Raisonnement par disjonction des cas

Définition :

> Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier.

Exemple :

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^n + 1$ est pair.