

Correction du DS 03
Terminale S (Spécialité Maths)

Exercice 1 :

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. $3^0 = 1 \equiv 1 [7]$
 $3^1 = 3 \equiv 3 [7]$
 $3^2 = 9 \equiv 2 [7]$
 $3^3 = 27 \equiv 6 [7]$
 $3^4 = 81 \equiv 4 [7]$
 $3^5 = 243 \equiv 5 [7]$
 $3^6 = 729 \equiv 1 [7]$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+6} - 3^n = 3^n \times 3^6 - 3^n \times 1 = 3^n(3^6 - 1)$
 or $3^6 \equiv 1 [7]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $3^{n+6} - 3^n \equiv 3^n \times 0 [7]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $3^{n+6} - 3^n \equiv 0 [7]$
 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $3^{n+6} \equiv 3^n [7]$ donc 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
3. $1000 = 166 \times 6 + 4$ donc $3^{1000} = 3^{166 \times 6 + 4} \equiv 3^4 [7]$ d'après la question précédente.
 Donc $3^{1000} \equiv 4 [7]$ d'après la question 1.
4. On cherche le reste de la division euclidienne de n par 6 que l'on note r et dans ce cas le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est le même que celui de 3^r par 7 et donc un des résultats de la question 1.
5. 7 est un nombre premier donc il est premier avec tous les nombres qui ne sont pas des multiples de 7.
 Démontrons que 3^n n'est jamais un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 Supposons qu'il existe un n tel que 3^n soit un multiple de 7. On note r le reste de la division euclidienne de n par 6 alors $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est le même que celui de 3^r par 7. Or dans la première question on voit qu'aucun des restes est égal à 0 donc ce n'est pas possible et il n'y a aucun n tel que 3^n soit un multiple de 7.
 Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^n et 7 sont premiers entre eux.

Exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 On remarque que $4^2 \equiv 5 (11)$ et $4^4 \equiv 3 (11)$
 De plus $3^3 \equiv 5 (11)$
 donc $4^{4n+2} - 3^{n+3} = (4^4)^n \times 4^2 - 3^n \times 3^3 \equiv 3^n \times 5 - 3^n \times 5 (11)$
 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0 (11)$$
 donc $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
2. On remarque que $17 \equiv 1 (4)$, $18 \equiv 2 (4)$ et $19 \equiv 3 (4)$
 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $17^n + 18^n + 19^n \equiv 1^n + 2^n + 3^n (4)$
 $3^n \equiv (-1)^n (4)$ or $(-1)^n \equiv 1 (4)$ si n est pair et non nul ou $(-1)^n \equiv -1 (4)$ si n est impair.
 Donc
 - (a) Si n est pair et $n \neq 0$:
 Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} \equiv 1^{2k} + 2^{2k} + 1^{2k} (4) \equiv 2 + 4^k (4) \equiv 2 (4)$
 - (b) Si n est impair et $n \neq 1$:
 Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $1^{2k+1} + 2^{2k+1} + 3^{2k+1} \equiv 1^{2k+1} + 2^{2k+1} + (-1)^{2k+1} (4) \equiv 2 \times 4^k (4) \equiv 0 (4)$

(c) Si $n = 0$ alors $1^n + 2^n + 3^n = 3 \equiv 3 \pmod{4}$

(d) Si $n = 1$ alors $1^n + 2^n + 3^n = 6 \equiv 2 \pmod{4}$

3. Démontrer que :

(a) Par disjonction de cas on obtient :

n	$\equiv 0 \pmod{5}$	$\equiv 1 \pmod{5}$	$\equiv 2 \pmod{5}$	$\equiv 3 \pmod{5}$	$\equiv 4 \pmod{5}$
$n^4 - 1$	$\equiv 4 \pmod{5}$	$\equiv 0 \pmod{5}$	$\equiv 0 \pmod{5}$	$\equiv 0 \pmod{5}$	$\equiv 0 \pmod{5}$

donc n n'est pas un multiple de 5 $\iff n^4 - 1$ est un multiple de 5(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:▷ Si n est un multiple de 5 alors $n^4 - 1 \equiv 4 \pmod{5}$ et $n^p \equiv 0 \pmod{5}$ De plus si n est impair alors n^p est impair et $n^4 - 1$ est pairet si n est pair alors n^p est pairdonc dans les deux cas $n^{p+4} - n^p$ est divisible par 10 donc n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.▷ Si n n'est pas un multiple de 5 alors $n^4 - 1$ est un multiple de 5De plus si n est impair alors n^p est impair et $n^4 - 1$ est pairet si n est pair alors n^p est pairdonc dans les deux cas $n^{p+4} - n^p$ est divisible par 10 donc n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.**Exercice 3 :**

1. $235 = \overline{11101011}^2$.

2. $\overline{101101}^2 = \overline{45}^{10}$.

3. $65 = \overline{230}^5$.

4. $\overline{231}^7 = \overline{120}^{10} = \overline{1111000}^2$.