

Exercice 1 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**5 points**

- On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
 - Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- Soit un repère orthonormal de l'espace.
On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan .
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
- On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
 - Montrer que l'entier y est impair.
 - On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
 - On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$.
En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
 - En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 2 spécialité**5 points**

- Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.
 - En déduire deux entiers, relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.
 - Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.
- On considère deux entiers naturels a et b . Pour tout entier n , on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.
On décide de coder un message, en procédant comme suit :
À chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b , mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

- Montrer que les entiers a et b sont tels que :
$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$$
 - En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.
 - Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) , avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que
$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$$
- On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.
 - Coder le message GAUSS.
 - Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0 \pmod{26}$.
En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.