

TP sur les nombres de Mersenne à l'aide d'un tableur
Épreuve pratique de mathématiques.

Les outils à votre disposition sont Excel ou Open Office.

Dans tout le TP, le symbole ✳ veut dire qu'il faut appeler l'examineur pour valider un travail ou une conjecture.

Partie I Etude du reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$

1. Ouvrir une feuille de calcul. (Excel ou OpenOffice)
Enregistrer cette feuille de calcul dans votre zone personnelle, dans un répertoire :
P :/Maths/Specialite/TP
et lui donner le nom de :
EtudeNombreMersenne01.xls ou **EtudeNombreMersenne01.ods**
2. En utilisant la feuille de calcul, afficher deux listes de 30 nombres entiers aléatoires entre 1 et 40. On note n les nombres de la première liste et m ceux de la deuxième.
3. Pour toutes les valeurs de n et m , comparer le reste de la division euclidienne de n par m et le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$.
Quelle conjecture peux-tu faire ? (✳)
4. Démonstration :
 - (a) Démontrer qu'il existe (q, r) , $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $2^n - 1 = (2^{mq} - 1) \times 2^r + (2^r - 1)$
 - (b) Démontrer que $\frac{2^{mq} - 1}{2^m - 1} = 2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \dots + 2^m + 1$
 - (c) Conclure.

Partie II Etude du $PGCD(2^n - 1; 2^m - 1)$.

1. Sur la même feuille de calcul que précédemment.
Pour toutes les valeurs de n et m , faire apparaître une relation entre $PGCD(2^n - 1; 2^m - 1)$ et $PGCD(n; m)$ (✳)
2. En utilisant la Partie I et l'algorithme d'Euclide, démontrons cette conjecture.
 - (a) Démontrer que si $r_1, r_2 \dots r_k$ sont les restes successifs dans l'algorithme d'euclide de la division de n par m alors $2^{r_1} - 1, 2^{r_2} - 1, \dots, 2^{r_k} - 1$ sont les restes successifs de l'algorithme d'euclide pour la division de $2^n - 1$ par $2^m - 1$.
 - (b) Conclure.

Partie III Etude de $2^n - 1$ et $2^m - 1$ si m et n sont premiers entre eux.

1. Quelle conjecture peux-tu faire si m et n sont premiers entre eux ? (✳)
2. Démontrer cette conjecture.

Compétences du B2i (Lycée) dans ce TP :

C1.2	Je sais structurer mon environnement de travail.
C2.4	Je valide, à partir de critères définis, les résultats qu'un traitement automatique me fournit.
C3.4	Je sais utiliser ou créer des formules pour traiter les données.