**Exercice 4** **5 points**

1. Soient $a$ et $b$ des entiers naturels non nuls tels que

$$\text{PGCD}(a+b\ ;\ ab) = p.$$

où $p$ est un nombre premier.

   (a) Démontrer que $p$ divise $a2$.
   On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.

   (b) En déduire que $p$ divise $a$.
   On constate donc, de même, que $p$ divise $b$.

   (c) Démontrer que :

$$\text{PGCD}(a\ ;\ b) = p.$$

2. On désigne par $a$ et $b$ des entiers naturels tels que $ab$.

   (a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a\ ;\ b) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) & = & 170 \end{cases}$$

   (b) En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\ ;\ ab) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a\ ;\ b) & = & 170 \end{cases}$$

**Exercice 2** **5 points**
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**
Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que $a$ et $b$ sont divisibles par $n-4$.
2. On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note $d$ le pgcd de $\alpha$ et $\beta$.
   (a) Établir une relation entre $\alpha$ et $\beta$ indépendante de $n$.
   (b) Démontrer que 5 divise $d$.
   (c) Démontrer que les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n+1$ et $n$ sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer, suivant les valeurs de $n$ et en fonction de $n$, le pgcd de $a$ et $b$. (On pourra utiliser les résultats des questions **2.c.** et **3.**)
   (b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

**Exercice 3 Á traiter par les élèves ayant choisi l'option mathématiques** **(5 points)**
Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul.

1. (a) Pour $1n6$, calculer les restes de la division euclidienne de $3^n$ par 7.
   (b) Démontrer que, pour tout $n$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que $3^n$ et $3^{n+6}$ ont le même reste dans la division par 7.
   (c) Á l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1000}$ par 7.
   (d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de $3^n$ par 7 pour $n$ quelconque ?
   (e) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $3^n$ est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que si $U_n$ est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

(b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors $U_n$ est divisible par 7.
En déduire les valeurs de $n$ telles que $U_n$ soit divisible par 7.

## Exercice 4 — 5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques
On considère l'équation (E) :

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

où les inconnues $x$ et $y$ sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0,\ y_0)$ est une solution de (E).
   (a) Démontrer que $x_0$ et $y_0$ sont premiers entre eux.
   (b) Prouver que $x_0$ et $y_0$ n'ont pas la même parité.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier $k$ tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$.
2. Calculer $1 + 5y^2$ pour $1 \leq y \leq 4$.
   En déduire un couple $(x_0,\ y_0)$ solution de (E).
3. (a) Pour tout entier naturel $n$ non nul, on admet l'existence d'un couple $(a_n,\ b_n)$ d'entiers naturels non nuls tel que

$$\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}.$$

   Donner $a_1$ et $b_1$.
   Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.
   (N.B. : On admet que si $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$ où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des entiers relatifs, alors $a = c$ et $b = d$.)
   (b) À l'aide d'une récurrence sur $n,\ n \geq 1$, montrer que les couples $(a_n,\ b_n)$, sont solutions de (E).
   (c) En calculant $\dfrac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$ et $\dfrac{1}{a_n + b_n\sqrt{5}}$, montrer que

$$\boxed{\left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{5}.}$$

   En déduire l'expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.