Exercice Brevet Blanc (spécialité mathématiques)

1. (a) Développer et réduire $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$ et $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.
   (b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.
   (a) Que valent a_1 et b_1 ?
   D'après les calculs de la question **1. a.**, donner pour d'autres valeurs de n les valeurs de a_n et b_n.
   (b) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}}{a_n+b_n\sqrt{6}}$
   En déduire l'expression de $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}$ en fonction de a_n et b_n.
   (c) En déduire que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, les termes a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (d) Pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, démontrer par contraposée que, si 5 ne divise pas (a_n+b_n) alors 5 ne divise pas non plus $(a_{n+1}+b_{n+1})$.
   (e) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad$ 5 ne divise pas (a_n+b_n).
   (f) Pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, démontrer que si $d|a_{n+1}$ et $d|b_{n+1}$ alors $d|PGCD(a_n,b_n)$.
   (On pourra exprimer $a_{n+1}-b_{n+1}$ et $a_{n+1}-6b_{n+1}$ en fonction de a_n ou b_n)
   (g) Pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
   (h) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, a_n et b_n sont premiers entre eux.