La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

Exercice 1 :

1. Montrer que, pour tout entier n, les entiers $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux.
2. Vérifier que $(n^2+1)^2 = n(n^3+2n)+1$. Démontrer que n^3+2n et n^2+1 sont premiers entre eux.
3. On considère l'équation : $36x - 25y = 5$ pour x et y entiers relatifs.
   Montrer que, pour toute solution (x, y), x est multiple de 5.

Exercice 2 :

1. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, $a+b$ et ab le sont aussi.
2. Montrer que si la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible, il en est de même pour les fractions :

$$\frac{a+b}{ab} \qquad \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \qquad \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Exercice 3 :

On pose $u = 2+\sqrt{3}$ et $v = 2-\sqrt{3}$

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier strictement positif, on peut écrire :

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \qquad et \qquad v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$$

   où a_n et b_n sont des entiers naturels.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Etablir les égalités : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$
3. En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ s sont irréductibles.

Exercice 4 :

a, b et c sont des entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que $a \equiv b\ [c] \Rightarrow PGCD(a,c) = PGCD(b,c)$
2. La réciproque est-elle vraie ?