

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

**La calculatrice est autorisée pour ce devoir**

**Exercice 1 :** Quelques questions de congruence ...

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on  $27 \equiv 5[n]$
2. (a) Trouver le (ou les) entier(s)  $b$  tel(s) que  $5^2 \equiv b[17]$   
 (b) En déduire les valeurs possibles pour  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  tels que :
  - i.  $5^4 \equiv \alpha_1[17]$
  - ii.  $5^8 \equiv \alpha_2[17]$
  - iii.  $5^{16} \equiv \alpha_3[17]$
  - iv.  $5^{500} \equiv \alpha_4[17]$
3. Quel est le reste de la division euclidienne de  $3^{1031}$  par 5 ?
4.  $n$  étant un entier naturel impair, trouver  $c$  tel que  $(-1)^n + 2^n \equiv c[3]$
5. (a) Déterminer les restes de la division euclidienne de  $5^p$  par 13 pour  $p$  entier naturel.  
 (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, le nombre  $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$  est divisible par 13.
6. Démontrer que pour tout entier  $k$ , 7 divise  $10^{6k+4} + 3$

**Exercice 2 :**

$A$  est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7.

Écrivez ce nombre en base 10, puis 2 et enfin 16. ( Tous les calculs doivent apparaître. )

**Exercice 3 :** Quelques propriétés de la congruence ...

Soient  $a$  et  $n$  deux entiers naturels (  $n \geq 2$  ) tels que  $a \equiv 1[n]$

1. Montrer que pour tout diviseur positif  $d$  de  $n$ ,  $a \equiv 1[d]$
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a^k \equiv 1[n]$
3. Montrer que  $\text{Cos} \left( \frac{2a\pi}{n} \right) = \text{Cos} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$
4. On note  $k$  est un entier tel que  $2^n \equiv 1[k]$ .  
 Prouver que  $2^a \equiv 2[k]$

**Exercice 4 :** Une démonstration ...

On note  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

On suppose qu'il existe un couple  $(m, n)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a = mb + n$  et  $0 \leq n < |b|$ .

Démontrer que ce couple est unique.