La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

Exercice 1 :

1. Partie I : Quelques calculs pour la suite ...
   On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   (a) Démontrer que $2(n+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n^3 + 2n^2 + n$
   (b) Démontrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
   (c) Développer réduire et ordonner $(n+1)^3$
   (d) En déduire que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$
2. Partie II : Étude de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$
   (a) Calculer S_1, S_2 et S_3
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$
   (d) Calculer S_{100}
3.

Exercice 2 :

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$
2. Déterminer tous les entiers a tels que $a|(42n+37)$ et $a|(7n+4)$
3. On note p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$
   Démontrer que q est pair.
4. Démontrer que si q est un nombre entier naturel impair, alors $q^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 3 :

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^4 + 4n^2 + 4$ n'est pas premier.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n \neq 1$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.
3. Démontrer que 50629 n'est pas premier.
4. Démontrer que 4097152085 n'est pas premier.