

A rendre le **Vendredi 6 Juin 2008**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

noindent **Exercice 3**

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 3; 2)$, $B(4; 6; -4)$ et le cône (Γ) d'axe (O, k) , de sommet O et contenant le point A .

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B .
 - (a) Déterminer une équation de (P) .
 - (b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ) .
3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q) .
Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
 - deux droites parallèles ;
 - deux droites sécantes ;
 - une parabole ;
 - une hyperbole ;
 - un cercle.

Partie B

Soient x , y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z) . Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - (a) Résoudre l'équation (E) .
 - (b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2.
 - (a) Démontrer que si le point M de coordonnées $(x; y; z)$ où x , y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
 - (b) Montrer que si M est un point de (C_2) , intersection de (Γ) et de (Q) , alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - (c) Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - (d) Déterminer un point de (C_2) , distinct de A , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.