A rendre le **Mardi** 23 **Mai** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours
Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ? Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B
On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. (a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :
$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
   (b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :
$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. (a) Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
   (b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. (a) Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
   (b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.