A rendre le **Mardi** 16 **Mai** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 **5 points**

Exercice de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   (a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.
   (c) Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$.
2. (a) **Question de cours**
   • *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

   Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.
   (b) Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega M M'$, pour M distinct de Ω.
3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.
   On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

   $$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

   $$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

   (b) Déterminer l'affixe de A_5.
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
   pour nn_0, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.