A rendre le **Mardi** 6 **Mai** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

▷ Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\ ;\ b) = 1$ alors PGCD$(a^2\ ;\ b^2) = 1$. ◁

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $\mathrm{S}_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
   (a) Démontrer que PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\mathrm{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD$\big(k^2\ ;\ (k+1)^2\big)$.
   (b) Calculer PGCD $(k\ ;\ k+1)$.
   (c) Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1})$.
3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
   (a) Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   (b) Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k+1}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+2})$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.