A rendre le **Vendredi** 7 **Mars** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :
On note (E) l'équation diophantienne : $15x^2 - 7y^2 = 9$.
On souhaite la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$
On nomme (a, b) un couple solution de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1. Démontrer que $b \equiv 0$ [3].
2. On note $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 3k_1$.
Démontrer que $a \equiv 0$ [3].
3. On note $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k_2$.
Démontrer que $k_1^2 \equiv -1$ [3].
4. Conclure.

Exercice 2 :
On note $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}^*$ et pour tout $i \in [|1, n|]$, $b_i \in \mathbb{Z}^*$

Démontrer que Pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1 \Leftrightarrow PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$

Rappel :

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_n$$

Exercice 3 :
Soient A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. (On prendra le centimètre comme unité).
Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = S(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : Pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.
   (a) Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   (b) Exprimer (l_n) en fonction de n et de l_0.
   (c) On pose $D_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n$.
   Déterminer la limite de (D_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   (b) Soit (Δ) la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
   Pour quelles valeurs de n, B_n appartient-il à (Δ) ?