A rendre le **Vendredi** 1 **Février** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :
On note (E) l'équation diophantienne : $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$.
On souhaite la résoudre dans $\mathbb{N}^2$
On nomme (a, b) un couple solution de (E) dans $\mathbb{N}^2$.

1. Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(a + 1)^3 < b^3 < (a + 3)^3$.
2. En déduire que $b = a + 2$
3. Résoudre (E) dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 2 :
On note $n!$ l'entier positif tel que $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ avec comme convention $0! = 1$
et
C_n^p l'entier positif tel que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

1. Calculer C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3 et C_4^4
2. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $(x + y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4$
3. Formule de Newton :
   On note x et y deux réels.
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$
   Cette relation nous permet de construire le triangle de Pascal et de trouver rapidement les coefficients du développement de $(x + y)^n$.
   A l'aide du triangle de Pascal, développer $(x + y)^8$ et $(x - y)^8$

Exercice 3 :
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a = 4 \times 10^n - 1 \quad ; \quad b = 2 \times 10^n - 1 \quad ; \quad c = 2 \times 10^n + 1.$$

1. (a) Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.
   (b) Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
   (c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en facteurs premiers de a_6.
   (e) Montrer que PGCD$(b_n\ ;\ c_n)$ = PGCD$(b_n\ ;\ 2)$.
   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
   (a) Justifier le fait que léquation (E) possède au moins une solution.
   (b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3, déterminer une solution particulière de (E).
   (c) Résoudre l'équation (E).

Liste des nombres premiers inférieurs a 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.