A rendre le **Vendredi** 12 **Janvier** 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Théorème 1 :
Soit m et n des entiers naturels premiers entre eux et supérieurs ou égaux à 2
Pour tout a, b dans $\mathbb{Z}$, il existe x dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x \equiv a\ [m] \\ x \equiv b\ [n] \end{cases}$$

Démonstration :

1. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $b + (a-b)vn = a + (b-a)um$
2. Conclure.

Théorème 2 :
Si x est une solution dans $\mathbb{Z}$ du système du théorème 1 alors les entiers y tels que $y \equiv x\ [mn]$ sont aussi des solutions du système, dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration :

1. Démontrer que si x et y sont des entiers relatifs solutions du système, alors $x - y$ est multiple de m et de n.
2. Conclure.

Théorème du reste chinois :
Soient k nombres entiers naturels n_1,n_2 … n_k premiers entre eux deux à deux et k entiers r_1,r_2 … r_k.

On note (S) le système de congruence $\begin{cases} x \equiv r_1\ [n_1] \\ x \equiv r_2\ [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv r_k\ [n_k] \end{cases}$.

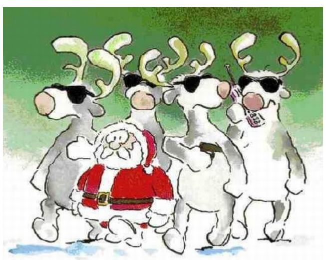
Démontrer qu'il existe u_1, u_2, …, u_k dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$x \equiv r_1N_1u_1 + r_2N_2u_2 + \ldots + r_kN_ku_k\ [n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k]$$

$$\text{avec pour tout } p \in [|1;k|],\ N_p = \frac{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}{n_p} = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_{p-1} \times n_{p+1} \times \ldots \times n_k$$

Application :
Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur.
Ils décident de se les partager également et de donner le reste au cuisinier chinois.
Celui-ci recevrait trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués.
Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Survient alors un naufrage et seuls 6 pirates, le cuisinier
et le trésor sont sauvés et le partage laisserait 5 pièces d'or à ce dernier.
On cherche alors la fortune minimale que peut espérer ce dernier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

1. On note x la fortune que peut espérer ce dernier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates.
   Démontrer qu'il existe u_1, u_2, u_3 et k dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = 198u_1 + 408u_2 + 935u_3 + 1122k$.
2. Trouver a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $17a + 66b = 1$ et en déduire u_1.
3. De la même façon , trouver u_2 et u_3.
4. En déduire que $x = 4151 + 1122k$.
5. Répondre au problème.



JOYEUX NOËL ET BONNE ANNÉE 2008