A rendre le **Vendredi** 30 **Novembre** 2007

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :(Exercice Type Bac)
On considère le nombre $A = 4444^{4444}$

1. Question préléminaire :
   On note N un entier naturel êt S la somme de ses chiffres (dans son écriture en base dix).
   Démontrer que $N \equiv S$ [9]
2. (a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
   (b) Prouver que $A \equiv 7$ [9].
3. On nomme :
   ➠ B la somme des chiffres de A.
   ➠ C la somme des chiffres de B.
   ➠ D la somme des chiffres de C.

   (a) Sachant que $4444 < 10000$, démontrer que A s'écrit en base dix, avec au plus 20000 chiffres.
   (b) En déduire que $B \leq 180000$.
   (c) Prouver que $C \leq 54$.
   (d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 54, proposer un majorant de D inférieur à 15.
   (e) En déduire la valeur de D.

Exercice 2 :

1. Soit a un entier qui n'est pas multiple de 7.
   Démontrer que $a^3 \equiv 1$ [7] ou $a^3 \equiv -1$ [7]
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv 0$ [7] $\Leftrightarrow x^3 \equiv 0$ [7]
3. Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0$ [7].
   Démontrer qu'au moins un des entiers a, b ou c est congru à 0 modulo 7.
4. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?