

A rendre le **Vendredi 23 Novembre 2007**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice : Le nombre d'or et la base d'or

On note $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

On note $(F_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ la suite de Fibonacci telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Quelques questions préliminaires :

- (a) Démontrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$
- (c) Démontrer que $\varphi^{-1} = \varphi - 1$
- (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi^{-n} = (-1)^{n-1} F_n \varphi + (-1)^n F_{n+1}$
- (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[F_{n-1} + F_{n+1}] = \varphi^n + (-1)^n \varphi^{-n}$
- (f) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[F_{2k+1} + F_{2k-1}] = \varphi^{2k} + \varphi^{-2k}$

2. Écriture en base **phinaire**.

(a) Écriture des nombres entiers en base phinaire :

- i. Trouver les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.
- ii. Exprimer 1 en base phinaire.
- iii. Montrer que $2 = \varphi + \varphi^{-2}$, puis donner une écriture phinaire de 2.
- iv. En remarquant que $3 = F_3 + F_1$, montrer qu'une écriture phinaire de 3 est 100,01
- v. En remarquant que $4 = 3 + \varphi^0$, montrer qu'une écriture phinaire de 4 est 101,01
- vi. Montrer que $5 = \varphi^3 + \varphi^{-1} + \varphi^{-4}$, puis donner une écriture phinaire de 5.
- vii. Montrer que $6 = \varphi^3 + \varphi^1 + \varphi^{-4}$, puis donner une écriture phinaire de 6.
- viii. En remarquant que $7 = F_5 + F_3$, montrer qu'une écriture phinaire de 7 est 10000,0001
- ix. Montrer que $8 = \varphi^4 + \varphi^0 + \varphi^{-4}$, puis donner une écriture phinaire de 8.
- x. Montrer que $9 = \varphi^4 + \varphi^1 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4}$, puis donner une écriture phinaire de 9.
- xi. En remarquant que $18 = F_7 + F_5$, montrer qu'une écriture phinaire de 16 est 1000000,000001
- xii. Montrer qu'une écriture phinaire de 47 est 100000000,00000001

(b) Passage de l'écriture phinaire à l'écriture décimale :

i. On note $a = 2,3$ en écriture phinaire.

Montrer que la valeur exacte de a est $\frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}$ en écriture décimale.

ii. On note $x = 211,01$ en écriture phinaire.

Trouver la valeur exacte de l'écriture décimale de x .

iii. On note $y = 327,257$ en écriture phinaire.

Trouver la valeur exacte de l'écriture décimale de x .

(c) Écriture de quelques nombres réels en base phinaire :

i. Montrer que $\sqrt{5}$ s'écrit 10,1 en bas phinaire.

ii. Trouver une écriture phinaire de $3 + \sqrt{5}$ comportant que des 0 et 1.

iii. Trouver une écriture phinaire de $4 + \sqrt{5}$ comportant que des 0 et 1.