A rendre le **Vendredi** 21 **Septembre** 2007

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :
Nous souhaitons démontrer la propriété ci-dessous :

La racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait, est irrationnel.

Rappels :
- Un nombre entier naturel n est **un carré parfait** s'il existe un entier naturel k tel que $n = k^2$.
  Exemples : 1 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 sont des carrés parfaits.
- Un nombre réel positif a est **un rationnel** s'il existe deux entiers naturels p et q avec $q \neq 0$ tel que $a = \frac{p}{q}$, p et q étant unique et premiers entre eux.
  Exemples : $\frac{2}{3}$; 2 ; 0,75 ; 4,09 sont des rationnels.
- Un nombre réel est **un irrationnel** s'il n'est pas rationnel.
  Exemples : π ; $\sqrt{2}$ sont des irrationnels.

On note a un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.
On va faire un raisonnement par l'absurde.
On suppose donc que $\sqrt{a}$ est un nombre rationnel.

1. Démontrer qu'il existe deux <u>uniques</u> entiers naturels p et q avec $q \neq 0$, p et q étant premiers entre eux, tels que :
$$p^2 = aq^2$$
2. On note n le plus grand des entiers inférieur à $\sqrt{a}$.
   On note ensuite $p' = aq - np$ et $q' = p - nq$.
   Calculer $p'^2 - aq'^2$.
3. Que peut-on alors dire des fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$?
4. (a) Si $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible, que peut-on dire de q' par rapport à q ?
   (b) Explique pourquoi dans l'exercice q' n'est pas un multiple de q ?
5. Conclure

Exercice 2 :
On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1)$
On peut aussi écrire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. Calculer S_{245}