Les Similitudes Planes

(Spécialité Maths)
Terminale S

Dernière mise à jour : Jeudi 31 Janvier 2008

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2007-2008)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Un peu de théorie ...

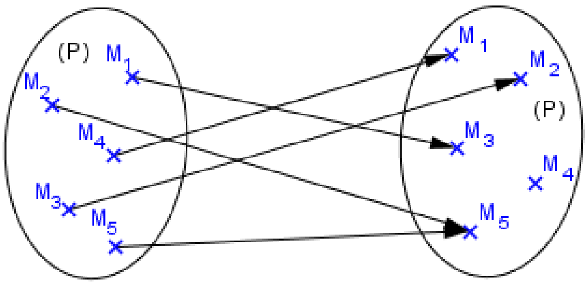
1.1 Définitions

On note f une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui à un point M de $\mathcal{P}$ lui associe un point M' de $\mathcal{P}$.
Si M' est l'image de M par l'application f, on note $\boxed{f(M) = M'}$.

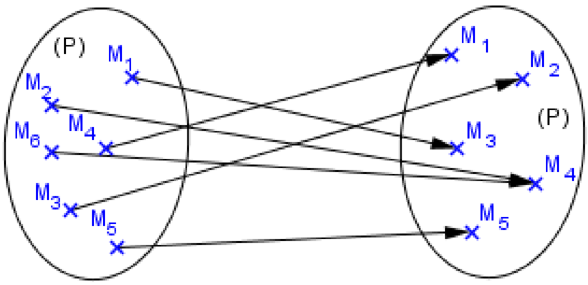
1.1.1 Applications surjectives

On dit que f est **surjective**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe au moins un antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

Exemples :
L'application ci-dessous, n'est pas surjective : M'_4 n'a pas d'antécédent.



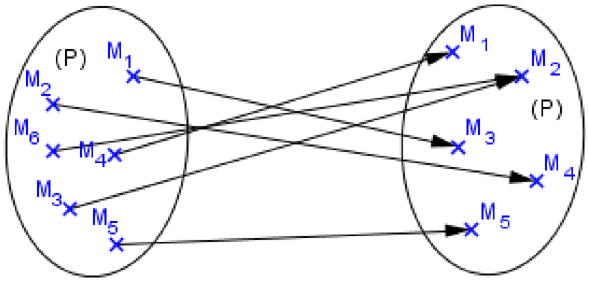
L'application ci-dessous, est surjective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée on au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.



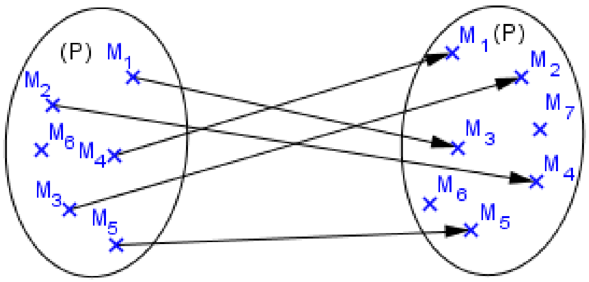
1.1.2 Applications injectives

On dit que f est **injective**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe au plus un antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

Conséquence :
Pour tout $M_1 \in \mathcal{P}$ et $M_2 \in \mathcal{P}$ si $f(M_1) = f(M_2)$ alors $M_1 = M_2$.
Exemples :
L'application ci-dessous, n'est pas injective : M'_2 a deux antécédents.



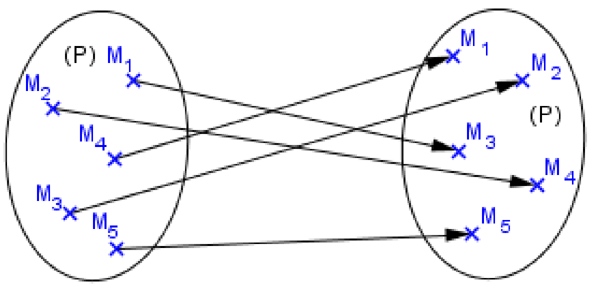
L'application ci-dessous, est injective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée on au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.



1.1.3 Applications bijectives

> On dit que f est **bijectivee**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe au et un seul antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

Conséquence :
Une application est bijective si elle est surjective et injective.
Exemples :
L'application ci-dessous, est bijective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée ont un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ.



1.1.4 Les transformations

Définition

> Un transformation de $\mathcal{P}$ est une application bijective de $\mathcal{P}$ dans lui-même.

Conséquence :
- A tout point M de $\mathcal{P}$ il existe un unique point M' de $\mathcal{P}$ tel que $M' = f(M)$.
- A tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe un point M de $\mathcal{P}$ tel que $M' = f(M)$.

Propriétés

1. Composition de deux transformation

   Si f et g sont des transformations de $\mathcal{P}$ alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des transformations de $\mathcal{P}$.

   Démonstration : Démontrer que $f \circ g$ est surjective et injective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

2. Transformation réciproque

   Si f est une transformation de $\mathcal{P}$ alors il existe une transformation réciproque notée f^{-1} telle que pour tout M du plan $\mathcal{P}$ on a :
   $f \circ f^{-1}(M) = f^{-1} \circ f(M) = M$

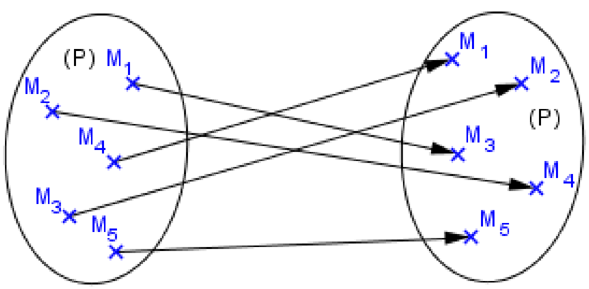
   Démonstration : Trouver une application réciproque et démontrer qu'elle est bijective.

Vocabulaire

1. Les points invariants

   Le point M de $\mathcal{P}$ est un point invariant de f une transformation de $\mathcal{P}$.
   si $f(M) = M$.

   Dans le schéma ci-dessous, M_5 est un point invariant.

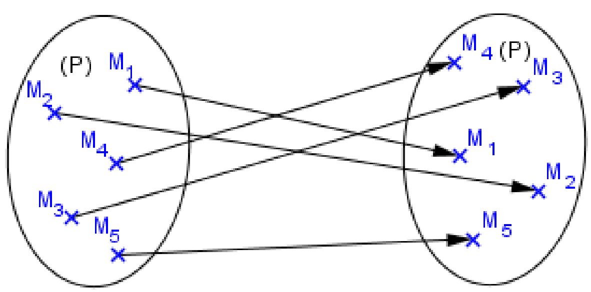


   Exemples : Quelles sont les points invariant d'une symétrie, translation, rotation et homothétie ?

2. Application identité

   On note application identité de $\mathcal{P}$ l'application $I_{d(\mathcal{P})}$ telle que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $I_{d(\mathcal{P})}(M) = M$.
   Tous les points de $\mathcal{P}$ sont invariants par $I_{d(\mathcal{P})}$.

   L'application ci-dessous est l'identité de $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ dans $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.



Exemples : Si f est une transformation de $\mathcal{P}$ alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_{d(\mathcal{P})}$.

2 Rappels sur quelques transformations du Plan

3 Les similitudes

3.1 Définition

3.2 Propriétés