La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $9(2n+1) - 2(9n+4) = 18n + 9 - 18n - 8 = 1$
   donc $\exists a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a(2n+1) + b(9n+4) = 1$
   donc d'après le théorème de Bézout $2n+1$ et $9n+4$ sont étrangers.
2. $(n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1$
   $n(n^3+2n) + 1 = n^4 + 2n^2 + 1$
   donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $(n^2+1)^2 = n(n^3+2n) + 1$
   On a donc $(n^2+1)(n^2+1) - n(n^3+2n) = 1$
   donc d'après le Théorème de Bézout, n^2+1 et n^3+2n sont étrangers.
3. On a $36x = 25y + 5 = 5(5y+1)$
   Or 36 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $5|x$.

Exercice 2 :

1. On note a et b deux nombres premiers entre eux :
   Si d est un nombre premier tel que $d|(a+b)$ et $d|(ab)$ alors $d|b(a+b)$ donc $d|ab + b^2$ or comme $d|ab$ alors $d|b^2$ donc $d|b$
   De même $d|a(a+b)$ donc $d|a^2 + ab$ or $d|ab$ donc $d|a^2$ donc $d|a$.
   On a donc $d|PGCD(a,b)$ or a et b sont premiers entre eux donc $d = 1$ et $PGCD(a+b, ab) = 1$ donc $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
2. ➠ D'après la question précédente, si $\dfrac{a}{b}$ est irréductible alors $PGCD(a,b) = 1$ donc $PGCD(a+b, ab) = 1$
   donc $\dfrac{a+b}{ab}$ est irréductible.

   ➠ Si $d|a+b$ et $d|a^2+ab+b^2$ alors $d|(a+b)^2 - ab$ donc $d|ab$.
   D'après la première question an a alors $d|PGCD(a,b)$ et comme $PGCD(a,b) = 1$ alors
   $PGCD(a+b, a^2+ab+b^2) = 1$ donc $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ est irréductible.

   ➠ Si $d|a^2b^2$ et $d|a^2+b^2$ alors $d|ab$ et $d|(a+b)^2 - 2ab$ donc $d|a+b$.
   D'après la première question an a alors $d|PGCD(a,b)$ et comme $PGCD(a,b) = 1$ alors
   $PGCD(a^2b^2, a^2+b^2) = 1$ donc $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ est irréductible.

Exercice 3 :
On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$

1. On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : Il existe $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ tels que $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.
   Initialisation :
   $u^1 = 2 + \sqrt{3}$ et $v^1 = 2 - \sqrt{3}$.
   $v^1 = 2 - \sqrt{3}$ et $v^1 = 2 - \sqrt{3}$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie et $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$
   Héréditée :
   On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
   $u^{n+1} = u^n \times u = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}$
   $v^{n+1} = v^n \times v = (a_n - b_n\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) - (a_n + 2b_n)\sqrt{3}$
   Donc en posant $\boxed{a_{n+1} = 2a_n + 3b_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = a_n + 2b_n}$ alors $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} \in \mathbb{N}$ et $u^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$ puis $v^{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{3}$.
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
   Conclusion :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ tels que $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.
2. Etablir les égalités : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$

   ➠ $a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + \sqrt{3}b_n)(a_n - \sqrt{3}b_n) = u^n \times v^n = (uv)^n$
   donc $a_n^2 - 3b_n^2 = [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^n = (4-3)^n = 1^n = 1$
   Conclusion : $\boxed{a_n^2 - 3b_n^2 = 1}$

- ➠ $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = a_n(a_n + 2b_n) - (2a_n + 3b_n)b_n = a_n^2 + 2a_nb_n - 2a_nb_n - 3b_n^2$
  donc $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$
  donc $\boxed{a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1}$

3. D'après le théorème de Bézout, $\dfrac{a_n}{b_n}$ est irréductible car $(a_n) \times a_n - (3b_n) \times b_n = 1$ et donc $PGCD(a_n, b_n) = 1$.
   D'après le théorème de Bézout, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ est irréductible car $a_n(b_{n+1}) - a_{n+1}(b_n) = 1$ et donc $PGCD(a_{n+1}, a_n) = 1$.
   D'après le théorème de Bézout, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ est irréductible car $(a_n)b_{n+1} - (a_{n+1})b_n = 1$ et donc $PGCD(b_{n+1}, b_n) = 1$.

Exercice 4 :
Il y avait une erreur d'énoncé ! (Exercice non comptabilisé)
a, b et c sont des entiers naturels non nuls.

1. Si $a \equiv b\ [c]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kc$
   - ➠ Si $d|a$ et $d|c$ alors $d|a - kc$ donc $d|b$.
   - ➠ Si $d|b$ et $d|c$ alors $d|b - kc$ donc $d|a$. donc les diviseurs communs de a et c sont les diviseurs communs de b et c et donc :
   $$PGCD(a, c) = PGCD(b, c)$$
2. Non car $1 \not\equiv 2\ [5]$ et $PGCD(1; 5) = PGCD(2; 5)$.