Correction de l'exercice **(spécialité mathématiques)**

1. (a) $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 1+6+2\sqrt{6} = 7+2\sqrt{6}$

   $\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(\left(1+\sqrt{6}\right)^2\right)^2 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 49+24+28\sqrt{2} = 85+28\sqrt{6}$

   $\left(1+\sqrt{6}\right)^6 = 1+6\sqrt{6}+15\left(\sqrt{6}\right)^2+20\left(\sqrt{6}\right)^3+15\left(\sqrt{6}\right)^4+6\left(\sqrt{6}\right)^5+\left(\sqrt{6}\right)^6 = 847+342\sqrt{6}.$

   (b) $847 = 2\times 342+163$
   $342 = 2\times 163+16$
   $163 = 10\times 16+3$
   $16 = 3\times 5+1$
   Donc $PGCD(847;342) = 1$ et donc 847 et 342 sont étrangers.

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

   (a) $a_2 = 7$ et $b_2 = 2$
   D'après **1. a.**, $a_4 = 73$ et $b_4 = 28$ puis $a_6 = 847$ et $b_6 = 342$..

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n\sqrt{6} = \left(1+\sqrt{6}\right)^n \neq 0$,
   $$\frac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}}{a_n+b_n\sqrt{6}} = \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{6}\right)^n} = 1+\sqrt{6}$$
   On a donc $\boxed{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6} = \left(1+\sqrt{6}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)}$

   (c) $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6} = a_n+b_n\sqrt{6}+a_n\sqrt{6}+6b_n = (a_n+6b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{6}$
   On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\boxed{a_{n+1} = a_n+6b_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = a_n+b_n}$

   (d) Si $5|(a_{n+1}+b_{n+1})$ alors $5|(2a_n+7b_n)$ alors $5|2(a_n+b_n)+5b_n$ alors $5|2(a_n+b_n)$
   Or 5 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, on a $5|(a_n+b_n)$
   donc par contraposée on obtient :
   Si 5 ne divise pas a_n+b_n alors 5 ne divise pas $a_{n+1}+b_{n+1}$.

   (e) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 5 ne divise pas (a_n+b_n).
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : 5 ne divise pas (a_n+b_n)
   Initialisation :
   $a_1+b_1 = 1 = 2$ donc 5 ne divise pas a_1+b_1 et $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Héréditée :
   On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie donc que 5 ne divise pas a_n+b_n.
   Alors d'après la question précédente, 5 ne divise pas $a_{n+1}+b_{n+1}$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ alors 5 ne divise pas a_n+b_n.

   (f) Pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$,
   Si d est un diviseur commun de a_{n+1} et b_{n+1} alors d'après la question précédente, d est premier avec 5.
   De plus si $d|a_{n+1}$ et $d|b_{n+1}$ alors $d|a_{n+1}-b_{n+1}$ donc $d|5b_n$
   Or d et 5 sont premiers entre eux donc d'après la Théorème de Gauss on a $d|b_n$.
   De plus si $d|a_{n+1}$ et $d|b_{n+1}$ alors $d|a_{n+1}-6b_{n+1}$ donc $d|-5a_n$
   Or d et 5 sont premiers entre eux donc d'après la Théorème de Gauss on a $d|a_n$.
   On peut donc conclure que $d|PGCD(a_n,b_n)$.

   (g) Si a_n et b_n sont premiers entre eux alors d'après la question précédente, les diviseurs communs de a_{n+1} et b_{n+1} divisent $PGCD(a_n,b_n) = 1$ donc $d = 1$ et donc a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

   (h) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, a_n et b_n sont premiers entre eux.
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : a_n et b_n sont premiers entre eux.
   Initialisation :
   $a_1 = 1$ et $b_1 = 2$ donc a_1 et b_1 sont premiers entre eux et $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
   Héréditée :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie donc a_n et b_n sont premiers entre eux.
   Alors d'après la question précédente, a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$
   Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ alors a_n et b_n sont premiers entre eux.