1. Chapitre 0 :
   (a) Exercice 7 :
   Si ni b ni c n'étaient inférieurs ou égaux à $\sqrt{a}$, alors chacun serait supérieur à $\sqrt{a}$ et leur produit serait donc supérieur à $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ce qui est absurde puisque $bc = a$, donc b ou c est inférieur ou égal à $\sqrt{a}$.
2. Chapitre 1 :
   (a) Exercice 12 :
   i. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + 2u_n &= (3(n+1)-1)^2 - 2 + (-2)^{n+1} + 2\left((3n-1)^2 - 2 + (-2)^n\right)\\
&= \left(3n+3-1\right)^2 - 2 + (-2)^{n+1} + 2(3n-1)^2 - 4 + 2(-2)^n\\
&= (3n+2)^2 - 2 + (-2)^{n+1} + 2(3n-1)^2 - 4 - (-2)^{n+1}\\
&= 9n^2 + 12n + 4 - 2 + 18n^2 - 12n + 2 - 4\\
&= 27n^2
\end{aligned}$$

   ii. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est mulitple de 27.
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $\ll u_n$ est multiple de 27 $\gg$
   <u>Initialisation :</u>
   $u_0 = (3 \times 0 - 1)^2 - 2 + (-2)^0 = 1 - 2 + 1 = 0$ est multiple de 27.
   donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   <u>Hérédité :</u>
   On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et donc que u_n est multiple de 27.
   Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{P}_{n+1})$?
   D'après la question précédente, $u_{n+1} = 27n^2 - 2u_n$
   or $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 27k$
   donc $u_{n+1} = 27(n^2 - 2k)$ avec $n^2 - 2k \in \mathbb{Z}$
   donc u_{n+1} est multiple de 27 et $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
   <u>Conclusion :</u>
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est multiple de 27.

   (b) Exercice 13 :
   On remarque qu'il n'y a pas beaucoup de nombres de trois chiffres multiple de 107
   Si $n = \overline{cdu}$ est multiple de 107 alors $n \in \{107; 214; 321; 428; 535; 642; 744; 856; 963\}$ et en plus pour tout ces nombres, il y a une relation remarquable entre leurs chiffres :

$$7c = 10d + u$$

   On a donc $x = 7d^2 + (7c - u)^2 = 7d^2 + (10d)^2 = 107d^2$
   donc x est multiple de 107.

   (c) Exercice 14 :
   i. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1) - n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)\\
&= (n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 - 1) - n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)\\
&= (n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2 + 9n + 5) - n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)\\
&= (n+1)[(n+2)(2n+3)(3n^2 + 9n + 5) - n(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)]\\
&= (n+1)[(2n^2 + 7n + 6)(3n^2 + 9n + 5) - (2n^2 + n)(3n^2 + 3n - 1)]\\
&= (n+1)(30n^3 + 90n^2 + 90n + 30)\\
&= 30(n+1)(n+1)^3\\
&= 30(n+1)^4
\end{aligned}$$

   ii. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est mulitple de 30.
   On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $\ll u_n$ est multiple de 30 $\gg$
   <u>Initialisation :</u>

$u_0 = 0(n+1)(2\times 0+1)(3\times 0^2+3\times 0-1) = 0$ est multiple de 30.
donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u>
On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et donc que u_n est multiple de 30.
Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{P}_{n+1})$?
D'après la question précédente, $u_{n+1} = 30(n+1)^4 + u_n$
or $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 30k$
donc $u_{n+1} = 30((n+1)^4 + k)$ avec $(n+1)^4 + k \in \mathbb{Z}$
donc u_{n+1} est multiple de 30 et $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
<u>Conclusion :</u>
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est multiple de 30.