La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

Exercice 1 :

Quelques questions de conguence ...

1. Si $27 \equiv 5[n]$ alors $n \geq 2$ et $n|(27-5)$ donc $n \geq 2$ et $n|22$
   On a donc $n = 2$ ou $n = 11$ ou $n = 22$ donc $\boxed{n \in \{2; 11; 22\}}$
2. (a) $25 - 17 = 8$ et $8 - 17 = -9$ donc on a $\boxed{b \in \{-9; 8\}}$
   (b) i. $5^4 = (5^2)^2 \equiv 8^2[17]$
   Or $8^2 = 64 = 3 \times 17 + 13$ ou $64 = 4 \times 17 - 4$
   donc $5^4 \equiv 13[17]$ ou $5^4 \equiv -4[17]$ donc $\boxed{\alpha_1 \in \{-4; 13\}}$
   ii. $5^8 = (5^4)^2 \equiv 13^2[17]$
   Or $13^2 = 169 = 9 \times 17 + 16$ ou $169 = 10 \times 17 - 1$
   donc $5^8 \equiv 16[17]$ ou $5^8 \equiv -1[17]$ donc $\boxed{\alpha_2 \in \{-1; 16\}}$
   iii. $5^{16} = (5^8)^2 \equiv (-1)^2[17]$
   Donc $5^{16} \equiv 1[17]$ donc $\boxed{\alpha_3 \in \{1\}}$
   iv. $5^{500} = 5^{31\times16+4} = (5^{16})^{31} \times 5^4 \equiv 5^4[17]$ donc $5^{500} \equiv 13[17]$ ou $5^{500} \equiv -4[17]$
   donc $\boxed{\alpha_4 \in \{-4; 13\}}$
3. $3 \equiv -2[5]$
   $3^2 \equiv (-2)^2[5]$ donc $3^2 \equiv -1[5]$
   $3^3 = 3^2 \times 3 \equiv -1 \times (-2)[5]$ donc $3^3 \equiv 2[5]$
   $3^4 = (3^2)^2 \equiv 1[5]$
   Or $3^{1031} = 3^{257\times4+3} = (3^4)^{257} + 3 \equiv 3^3[5]$ donc $\boxed{3^{1031} \equiv 2[5]}$
4. $2 \equiv -1[3]$
   donc $(-1)^n + 2^n \equiv (-1)^n + (-1)^n[3]$
   or n est impair donc $(-1)^n + 2^n \equiv -2[3]$
   donc $\boxed{(-1)^n + 2^n \equiv 1[3]}$.
5. (a) $5 \equiv 5[13]$
   $5^2 = 25 \equiv 12[13]$
   $5^3 \equiv 60[13]$ donc $5^3 \equiv 8[13]$
   $5^4 \equiv 40[13]$ donc $5^4 \equiv 1[13]$
   Conclusion : les restes de la division euclidienne de 5^p par 13 sont $\boxed{\{5; 8; 12; 1\}}$
   (b) $31 \equiv 5[13]$ et $18 \equiv 5[13]$
   donc $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n-1}\right][13]$
   Or il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = n' + 1$ et $5^{4n-1} = 5^{4n'+3}$
   donc $N \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n'+3}\right][13] \equiv (5+8)[13] \equiv 0[13]$
   donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.
6. $10 \equiv 3[7]$, $10^2 \equiv 2[7]$, $10^3 \equiv -1[7]$ et $10^4 \equiv -3[7]$
   Or $10^{6k+4} + 3 = ((10^2)^3)^k \times 10^4 + 3$
   ➪ $((10^2)^3)^k \equiv (((-1)^2)^3)^k[7]$ donc $((10^2)^3)^k \equiv 1[7]$
   ➪ $10^4 \equiv -3[7]$

➪ $3 \equiv -4[7]$
donc $10^{6k+4} + 3 \equiv 1 \times (-3) - 4[7]$ donc $10^{6k+4} + 3 \equiv 0[7]$ Conclusion :
Pour tout entier k, $\boxed{7 \text{ divise } 10^{6k+4} + 3}$

Exercice 2 :
$A = 1 \times 7^4 + 6 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 4 \times 7^0 = 4722$
En base 10, on obtient : $\boxed{N = 4722}$
En base 2, on obtient : $\boxed{N = 1001001110010}$
En base 16, on obtient : $\boxed{N = 1272}$

Exercice 3 :
Si $a \equiv 1[n]$ alors il existe un entier k_1 tel que $a = 1 + k_1 n$

1. Pour tout diviseur positif d de n, il existe k_2 un entier tel que $n = k_2 d$
   donc $a = 1 + k_1 n = 1 + k_1 k_2 d$ or $k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$ donc $\boxed{a \equiv 1[d]}$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1^k[n]$ donc $\boxed{a^k \equiv 1[n]}$
3. $Cos\left(\dfrac{2a\pi}{n}\right) = Cos\left(\dfrac{2(1+k_1 n)\pi}{n}\right) = Cos\left(\dfrac{2\pi}{n} + 2k_1\pi n\right) = Cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
4. On note k est un entier tel que $2^n \equiv 1[k]$.
   $2^a = 2^{1+k_1 n} = (2^n)^{k_1} \times 2$
   or $2^n \equiv 1[k]$ donc $(2^n)^{k_1} \equiv 1[k]$
   donc $\boxed{2^a \equiv 2[k]}$

Exercice 4 : Une démonstration ...
On suppose qu'il existe deux couples (m_1, n_1) et (m_2, n_2) tels que
$a = bm_1 + n_1$ avec $0 \leq n_1 < |b|$
et
$a = bm_2 + n_2$ avec $0 \leq n_2 < |b|$
alors $n_2 - n_1 = b(m_1 - m_2)$ et $-|b| < n_2 - n_1 < |b|$.
On a donc $n_2 - n_1$ est un multiple de b strictement compris entre $-|b|$ et $|b|$.
Donc $n_2 - n_1 = 0$ et donc $n_2 = n_1$.
Si $n_2 = n_1$ alors $m_1 = m_2$ et donc les couples sont identiques.