**Exercice 1 :**

1. Partie I : Quelques calculs pour la suite ...

   (a) $2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k = 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)^2 = n(n^2+2n+1) = \boxed{n^3+2n^2+n}$

   (b) C'est une identité remarquable de la forme $(a+b)^2$ :
   $\left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2$
   $= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n^3+2n^2+n) + (n^2+2n+1)$
   $= \boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n^3+3n^2+3n+1}$

   (c) A l'aide du triangle de Pascal on obtient : $(n+1)^3 = \boxed{n^3+3n^2+3n+1}$

   (d) On remarque que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$
   donc
   $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2$

   Or d'après la question (b) et (c) on obtient : $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 =$

2. Partie II : Étude de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

   (a) $S_1 = 1^3 = \boxed{1}$
   $S_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = \boxed{9}$
   $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = \boxed{36}$

   (b) On note $(\mathcal{P}_n)$ la prorpiété :$\ll S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \gg$

   Initialisation :
   $S_1 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1^2 = 1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
   Hérédité :
   On suppose que pour tout $k \in [|1, n|]$, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.
   Montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie aussi :
   $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = S_n + (n+1)^3$
   Or puisque $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   alors
   $S_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$ et d'après la question 1.(d) on a
   $S_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie
   Conclusion :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\boxed{S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n == \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$

(d) $S_{100} = \dfrac{1}{4}(100^4 + 2 \times 100^3 + 100^2) = \boxed{25502500}$

3.

**Exercice 2 :**

1. Il faut que $n \neq -1$ :
   On a $\dfrac{3n-4}{n+1} = \dfrac{3(n+1)-3-4}{n+1} = 3 - \dfrac{7}{n+1}$
   Si $(n+1)|(3n-4)$ alors $(n+1)|7$ donc il y a 4 possibilités : $n+1 \in \{-7;-1;1;7\}$ donc $\boxed{n \in \{-8;-2;0;6\}}$
2. Si $a|(42n+37)$ et $a|(7n+4)$ alors $a$ divise toutes les combinaisons linéaires de $42n+37$ et $7n+4$
   donc $a$ divise $(42n+37) - 6(7n+4) = 42n + 37 - 42n - 24 = 13$
   On a donc $\boxed{a \in \{-13;-1;1;13\}}$
3. On a $p^2 = 2q^2 + 1$ donc $p^2$ est impair.
   Si $p$ pair alors $p^2$ est pair donc la contraposée est vraie aussi donc $p^2$ impair $\Rightarrow p$ impair.
   Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$ et donc $2q^2 = p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2+k)$ donc $q^2 = 2(k^2+k)$ et donc $q^2$ est pair.
   Si $q$ est impair alors $q^2$ est impair et la contraposée est vraie donc $q^2$ pair $\Rightarrow q$ est pair.
4. $q^2 - 1 = (q+1)(q-1)$ or $q$ est impair donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tels que $q = 2k+1$
   donc $q^2 - 1 = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$
   Or $k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc il est pair et il existe $k'$ tel que $k(k+1) = 2k'$
   On a donc $q^2 - 1 = 8k'$ et $q^2 - 1$ est un multiple de 8.

**Exercice 3 :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^4 + 4n^2 + 4 = (n^2+2)^2$ et comme $n^2 + 2 \neq 1$ donc n'est pas premier.
2. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ donc n'est pas premier sauf pour $n = 1$ car $1^4 + 4 = 5$.
3. $50629 = 50625 + 4 = 15^4 + 4 = (15^2 + 30 + 2)(15^2 - 30 + 2) = 257 \times 197$ donc n'est pas premier.
4. $4097152085 = 253^4 + 4 = (253^2 + 506 + 2)(253^2 - 506 + 2) = 64517 \times 63505$