Exercice 1 :

On note (E) l'équation diophantienne : $15x^2 - 7y^2 = 9$.
On nomme (a, b) un couple solution de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1. (a, b) est un couple solution de (E) donc $15a^2 - 7b^2 = 9$
   Or $15 \equiv 0$ [3] et $9 \equiv 0$ [3]
   donc $-7b^2 \equiv 0$ [3] or 7 et 3 sont étrangers donc d'après le théorème de Gauss $b^2 \equiv 0$ [3].
   ▷ Si $b \equiv 0$ [3] alors $b^2 \equiv 0$ [3]
   ▷ Si $b \equiv 1$ [3] alors $b^2 \equiv 1$ [3]
   ▷ Si $b \equiv 2$ [3] alors $b^2 \equiv 1$ [3]
   donc la seule possibilité est $\boxed{b \equiv 0 \ [3]}$.
2. Comme $b \equiv 0$ [3] alors il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 3k_1$.
   donc $15a^2 - 7(3k_1)^2 = 9 \Leftrightarrow 15a^2 - 63k_1^2 = 9 \Leftrightarrow 5a^2 - 21k_1^2 = 3$
   or $21 \equiv 0$ [3] et $3 \equiv 0$ [3]
   donc $5a^2 \equiv 0$ [3] or 5 et 3 sont étrangers donc d'après le théorème de Gauss $a^2 \equiv 0$ [3] et donc comme au 1.
   on a $\boxed{a \equiv 0 \ [3]}$
3. Comme $a \equiv 0$ [3] alors il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k_2$.
   On a donc $15(3k_2)^2 - 7(3k_1)^2 = 9 \Leftrightarrow 15 \times 9k_2^2 - 7 \times 9k_1^2 = 9 \Leftrightarrow 15k_2^2 - 7k_1^2 = 1 \Leftrightarrow 7k_1^2 + 1 = 15k_2^2$
   or $15 \equiv 0$ [3]
   donc $k_1^2 + 1 \equiv 0$ [3] donc $7k_1^2 \equiv -1$ [3]
   Or $7 \equiv 1$ [3] donc $\boxed{k_1^2 \equiv -1 \ [3]}$
4. D'après la première question $k_1^2 \equiv 0$ [3] ou $k_1^2 \equiv 1$ [3]
   donc cette équation n'a pas de solution entière.

Exercice 2 :

On note $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}^*$ et pour tout $i \in [|1, n|]$, $b_i \in \mathbb{Z}^*$

Première étape : Démontrons que $PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1 \Rightarrow$ pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1$

Si $PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$ alors d'après le théorème de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $u(a) + v(b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_n) = 1$
donc pour tout $i \in [|1, n|]$ $u(a) + w(b_i) = 1$ avec, comme $b_i \in \mathbb{Z}^*$, $w = \dfrac{v \times b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_n}{b_i}$
donc pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1$.

Deuxième étape : Démontrons que pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1 \Rightarrow PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$

Pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1$ alors :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :

$$PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$$

Initialisation :

Comme pour tout $i \in [|1, n|]$, $PGCD(a, b_i) = 1$ alors $PGCD(a, b_1) = PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{1} b_i\right) = 1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie donc que $PGCD\left(a, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$.

▷ d'après le théorème de Bezout, il existe $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $v_1 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$u_1(a) + v_1\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1 \qquad (1)$$

De plus, pour tout $i \in [|1, n+1|]$, $PGCD(a, b_i) = 1$ donc $PGCD(a, b_{n+1}) = 1$
▷ d'après le théorème de Bezout, il existe $u_2 \in \mathbb{Z}$ et $v_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$u_2(a) + v_2(b_{n+1}) = 1 \qquad (2)$$

Par multiplication de (1) et (2), on obtient :
$\left(u_1 a + v_1 \prod_{i=1}^{n} b_i\right)(u_2 a + v_2 b_{n+1}) = 1$

$\Rightarrow u_1 u_2 a^2 + u_1 v_2 b_{n+1} + v_1 u_2 \prod_{i=1}^{n} b_i + v_1 v_2 \prod_{i=1}^{n} b_i = 1$

$\Rightarrow \left(u_1 u_2 a + u_1 v_2 b_{n+1} + v_1 u_2 \prod_{i=1}^{n} b_i\right) a + (v_1 v_2) \prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$

donc d'après le théorème de Bézout, comme :
$u_1 u_2 a + u_1 v_2 b_{n+1} + v_1 u_2 \prod_{i=1}^{n} b_i \in \mathbb{Z}$ et $v_1 v_2 \in \mathbb{Z}$
alors

$$PDCD\left(a;\prod_{i=1}^{n+1} b_i\right) = 1 \text{ et } (\mathcal{P}_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

Donc pour tout $i \in [|1,n|]$, $PGCD(a,b_i) = 1 \Rightarrow PGCD\left(a,\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$

Conclusion :

Pour tout $i \in [|1,n|]$, $PGCD(a,b_i) = 1 \Leftrightarrow PGCD\left(a,\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 1$

Exercice 3 :

1. Figure de l'exercice :

2. Le triangle $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ est l'image du triangle $A_0B_nB_{n+1}$ par la similitude S.
Or les similitude conservent les angles géométriques donc les deux triangles sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : Pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, $l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = S(B_n)S(B_{n+1})$
   Comme les deux triangles sont semblables et que $A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n$ alors
   $l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+21} = S(B_n)S(B_{n+1}) = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}l_n$
   donc pour tout entier naturel n, $\boxed{l_{n+1} = \frac{1}{2}l_n}$
   donc (l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $B_0B_1 = l_0$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times l_0 = \frac{l_0}{2^n}$
   (c) $D_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n = l_0 \times \dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = l_0\left(2-\frac{1}{2^n}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 2l_0$
4. (a) On note (E) : $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   Solution particulière : On trouve que $3(-2) - 4(-2) = 2$ donc $(-2;-2)$ est une solution particulière de (E)
   Solution générale :On note $(x;y)$ une autre solution de (E) alors on obtient :
   $3(x+2) - 4(y+2) = 0 \Leftrightarrow 3(x+2) = 4(y+2)$ or 3 et 4 sont étrangers donc d'après le théorème de Gauss4 divise $x+2$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -2 + 4k$
   On a alors $3 \times 4k = 4(y+2) \Leftrightarrow y = 3k - 2$
   Donc les solutions sont de la forme $(-2+4k; 3k-2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) B_n appartient à (Δ) si $(\widehat{\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
   Or
   $(\widehat{\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_0B_10};\overrightarrow{A_0B_2}}) + \ldots (\widehat{\overrightarrow{A_0B_{n-1}};\overrightarrow{A_0B_n}}) \equiv \frac{3n\pi}{4}\ [2\pi]$
   Il faut donc résoudre $\frac{3n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
   Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$
   $\frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 3n - 4k = 2$
   D'après la question précédente on obtient $n = -2 + 4\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$