Exercice 1 :
On note (E) l'équation diophantienne : $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$.
On souhaite la résoudre dans $\mathbb{N}^2$
On nomme (a, b) un couple solution de (E) dans $\mathbb{N}^2$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$:
   - $b^3 - (a+3)^3 = a^3 + 8a^2 - 6a + 8 - a^3 - 9a^2 - 27a - 27 = -a^2 - 33a - 19$
     Or $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ donc $b^3 - (a+3)^3 \leq 0$.
     Peut-il s'annuler ?
     $\Delta = (-33)^2 - 4(-19)(-1) = 1070 > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
     $a_1 = \dfrac{33 + \sqrt{1070}}{-2} \notin \mathbb{N}$ et $a_1 = \dfrac{33 + -\sqrt{1070}}{-2} \notin \mathbb{N}$
     donc $b^3 - (a+3)^3 < 0 \Leftrightarrow b^3 < (a+3)^3$.
   - $(a+1)^3 - b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 - 8a^2 + 6a - 8 = -5a^2 + 9a - 7$
     $\Delta = (-9)^2 - 4(-5)(-7) = -59 < 0$ donc le polynôme est du signe de -5 et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $\mathbb{N}$.
     On a donc $(a+1)^3 - b^3 < 0 \Leftrightarrow (a+1)^3 < b^3$
   - Conclusion :
     Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a $(a+1)^3 < b^3 < (a+3)^3$
2. D'après la question précédente : pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a $(a+1)^3 < b^3 < (a+3)^3$
   Or la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
   $f\left((a+1)^3\right) < f\left(b^3\right) < f\left((a+3)^3\right) \Leftrightarrow a+1 < b < a+3$
   Or il existe qu'un seul entier vérifiant cet encadrement : On a donc $b = a+2$
3. Résoudre (E) dans $\mathbb{N}^2$.
   D'après les question précédente, $y = x+2$ donc l'équation (E) dans $\mathbb{N}$ est équivalente à :
   $(x+2)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$
   $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 9$.
   Si $x = 0$ alors $y = 2$ et si $x = 9$ alors $y = 11$.
   Donc l'ensemble des solutions de (E) est : $\{(0; 2); (9; 11)\}$

Exercice 2 :
On note $n!$ l'entier positif tel que $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ avec comme convention $0! = 1$
et
C_n^p l'entier positif tel que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

1. $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$ et $C_4^4 = 1$
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$
   donc $(x+y)^4 = C_4^0x^4 + C_4^1x^3y + C_4^2x^2y^2 + C_4^3xy^3 + C_4^4y^4$
3. Formule de Newton :
   On note x et y deux réels.
   On note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$
   Initialisation :
   $(x+y)^0 = 1$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} C_0^k x^k y^{0-k} = C_0^0 \times 1 \times 1 = 1$ Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \times (x+y)^1 = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\right)(x+y)$
   donc
   $(x+y)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1}$
   On pose le changement de variable : $\alpha = k+1$ et donc $k = \alpha - 1$ dans la première somme.
   On obtient donc :
   $(x+y)^{n+1} = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n+1} C_n^{\alpha-1} k x^\alpha y^{n-\alpha+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = C_n^n x^{n+1} + \sum_{\alpha=1}^{n} C_n^{\alpha-1} k x^\alpha y^{n-\alpha+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} + C_n^0 y^{n+1}$

Donc
$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1}$
Or
$C_n^{k-1} + C_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k+1)!}(k+n-k+1) = C_{n+1}^k$
donc :
$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n-k+1}$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$
Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a :
$C_n^p + C_n^{p+1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p)!}(p+1+n-p) = C_{n+1}^{p+1}$
On a donc d'après le triangle de Pascal :
$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$
$(x-y)^8 = x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$

Exercice 3 :

1. (a) $a_1 = 39$, $a_2 = 399$ et $a_3 = 3999$
   $b_1 = 19$, $b_2 = 199$ et $b_3 = 1999$
   $c_1 = 21$, $c_2 = 201$ et $c_3 = 2001$.
   (b) $10 \equiv 1$ [3] donc $a_n \equiv 3$ [3] donc $a_n \equiv 0$ [3].
   $10 \equiv 1$ [3] donc $c_n \equiv 3$ [3] donc $c_n \equiv 0$ [3].
   (c) $\sqrt{3999} \approx 63,24$ or 3999 n'est divisible par aucun nombre premier jusqu'à 63 donc il est premier.
   (d) $b_n \times c_n = 4 \times 10^{2n} + 2 \times 10^n - 2 \times 10^n - 1 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$ On a donc
   $a_6 = b_3 \times c_3 = 3999 \times 2001 = 3 \times 23 \times 29 \times 3999$
   (e) On nomme k un diviseur commun de b_n et 2.
   Si $k|b_n$ et $k|2$ alors $k|(b_n+2)$ or $b_n + 2 = c_n$ donc $k|c-n$.
   On nomme k un diviseur commun de b_n et c_n.
   Si $k|b_n$ et $k|c_n$ alors $k|c_n - b_n$ or $c_n - b_n = 2$ donc $k|2$.
   On a donc $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 2)$ Si k est un diviseur de b_n et 2 alors $k|(b_n - 2.10^n)$ donc $k|1$.
   On a donc que $PGCD(b_n, 2) = 1$ et donc $PGCD(b_n, c_n) = 1$
2. On considère l'équation (E) $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
   (a) D'après la question précédente b_3 et c_3 sont premiers entre eux donc $PGCD(b_3, c_3) = 1$.
   Donc $PGCD(b_3, c_3) = 1$ divise 1 donc l'équation admet des solutions entières.
   (b) On trouve que $1 = 1000b_3 - 999c_3$
   (c) On obtient donc les couples de la forme : $(1000 - kc_3; -999 + kb_3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$