Théorème 1 :
Démonstration :

1. m et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$ donc $(a-b)um + (a-b)vn = (a-b)$ donc $(a-b)vn = a - b - (a-b)um$ donc $\boxed{b + (a-b)vn = a + (b-a)um}$
2. On pose $x = b + (a-b)vn \equiv b\ [n]$ et $x = a + (b-a)um \equiv a\ [m]$
   x est donc solution du système : $\begin{cases} x \equiv a\ [m] \\ x \equiv b\ [n] \end{cases}$

Théorème 2 :

Démonstration :

1. On note x et y deux solutions du système du théorème 1.
   On a $x \equiv a\ [m]$ et $y \equiv a\ [m]$ donc $y - x \equiv 0\ [m]$
   de plus
   On a $x \equiv b\ [n]$ et $y \equiv b\ [n]$ donc $y - x \equiv 0\ [n]$
   donc $n|(y-x)$ et $m|(y-x)$ et comme m et n sont étrangers alors d'après le théorème de Gauss
   $y - x \equiv 0\ [mn]$
2. Si x est une solution du système alors d'après la question précédente, toute solution autre y est telle que $y - x \equiv 0\ [mn]$ et donc $\boxed{y \equiv x\ [mn]}$.

Théorème du reste chinois :
Démonstration :
➠ Démontrons que $x = u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_kN_kr_k$ est une solution du système :
Pour tout $i \in [|1,k|]$ on a $PGCD(N_i, n_i) = 1$
Donc d'après le théorème de Bézout, il existe $u_i \in \mathbb{Z}$ et $v_i \in \mathbb{Z}$ tels que : $u_iN_i + v_in_i = 1$
$u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_kN_kr_k$
$= u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_iN_ir_i \ldots + u_kN_kr_k$
$= u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + (1 - v_in_i)r_i \ldots + u_kN_kr_k$
$= r_i + u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots - v_in_ir_i \ldots + u_kN_kr_k$
or $u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots - v_in_ir_i \ldots + u_kN_kr_k \equiv 0\ [n_i]$
donc pour tout $i \in |1,k|]$, on a :

$$u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_kN_kr_k \equiv r_i\ [n_i]$$

Conclusion : $x = u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_kN_kr_k$ est une solution du système.
➠ Démontrons si y est une autre solution alors $y \equiv x\ [n_1n_2 \ldots n_k]$
Si y est solution du système alors pour tout $i \in [|1,k|]$ on a $y - x \equiv 0\ [n_i]$
donc pour tout $i \in [|1,k|]$, $n_i|(y-x)$ or les n_i sont premiers deux à deux donc d'après le Théorème de Gauss on a $n_1n_2 \ldots n_k|(y-x)$ donc $y \equiv x\ [n_1n_2 \ldots n_k]$.
➠ Conclusion :
Le système admet une seule solution $x \equiv u_1N_1r_1 + u_2N_2r_2 + \ldots + u_kN_kr_k\ [n_1n_2 \ldots n_k]$

Application :

1. On note x la fortune que peut espérer ce dernier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates.
   Il s'agit donc de trouver x positif et minimal vérifiant : $\begin{cases} x \equiv 3\ [17] \\ x \equiv 4\ [11] \\ x \equiv 5\ [6] \end{cases}$ D'après le théorème du reste chinois, il existe u_1, u_2, u_3 et k dans $\mathbb{Z}$ tels que
   $x \equiv 3 \times 11 \times 6u_1 + 4 \times 17 \times 6u_2 + 5 \times 17 \times 11u_3\ [17 \times 11 \times 6]$.
   donc $x \equiv 198u_1 + 408u_2 + 935u_3\ [1122]$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$\boxed{x = 198u_1 + 408u_2 + 935u_3 + 1122k}$

2. Pour u_1 on effetue les divisions euclidienne :
$66 = 3 \times 17 + 15$
$17 = 1 \times 15 + 2$
$15 = 7 \times 2 + 1$
On a donc
$1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 1 \times 15) = 8 \times 15 - 7 \times 17 = 8(66 - 3 \times 17) - 7 \times 17 = 8 \times 66 - 31 \times 17$
donc $\boxed{-31 \times 17 + 8 \times 66 = 1}$ et on obtient $a = -31$ et $b = 8$ et donc d'après la démonstration du théorème chinois : $\boxed{u_1 = 8}$

3. Pour u_2 on effetue les divisions euclidienne :
$102 = 9 \times 11 + 3$
$11 = 3 \times 3 + 2$
$3 = 1 \times 2 + 1$
On a donc $1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - 1 \times (11 - 3 \times 3) = 4 \times 3 - 1 \times 11 = 4(102 - 9 \times 11) - 1 \times 11 = 4 \times 102 - 37 \times 11$
donc $\boxed{4 \times 102 - 37 \times 11 = 1}$ et donc d'après la démonstration du théorème chinois : $\boxed{u_2 = 4}$
Pour u_3 on effetue les divisions euclidienne :
$187 = 31 \times 6 + 1$
On a donc $1 = 187 - 31 \times 6$ donc $\boxed{1 \times 187 - 31 \times 6 = 1}$ et donc d'après la démonstration du théorème chinois : $\boxed{u_3 = 1}$

4. On a $x = 198u_1 + 408u_2 + 935u_3 + 1122k$
donc $x = 198 \times 8 + 408 \times 4 + 935 \times 1 + 1122k = 4151 + 1122k \equiv 4151\ [1122]$

5. 4151 est donc une solution du système.
Est-ce la plus petite ?
$4151 = 1122 \times 3 + 785$ donc $\boxed{x \equiv 785\ [1122]}$
La réponse au problème est donc 785 pièces d'or.