Exercice 1 :(Exercice Type Bac)
On considère le nombre $A = 4444^{4444}$

1. Question préléminaire :
   On note N un entier naturel et S la somme de ses chiffres (dans son écriture en base dix).
   Démontrer que $N \equiv S$ [9]
   On note $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$.
   Or $10 \equiv 1$ [9] donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $10^n \equiv 1$ [9].
   On a donc $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_+ a_1 + a_0$ [9]
   Si on nome $S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_+ a_1 + a_0$ alors $\boxed{N \equiv S \text{ } [9]}$
2. (a) $7^2 = 49 \equiv 4$ [9]
   $7^3 = 7 \times 4$ [9] $\equiv 28$ [9] $\equiv 1$ [9].
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.
   ➠ Si $n = 3k$ alors $7^n = (7^3)^k \equiv (1)^k$ [9] $\equiv 1$ [9].
   ➠ Si $n = 3k + 1$ alors $7^n = (7^3)^k \times 7 \equiv 7 \times (1)^k$ [9] $\equiv 7$ [9].
   ➠ Si $n = 3k + 2$ alors $7^n = (7^3)^k \times 7^2 \equiv 4 \times (1)^k$ [9] $\equiv 4$ [9].

   (b) $4444 \equiv 7$ [9] donc $A = 444^{4444} \equiv 7^{4444}$ [9]
   Or $4444 = 3 \times 1481 + 1$ donc $\boxed{A \equiv 7[9]}$
3. On nomme :
   ➠ B la somme des chiffres de A.
   ➠ C la somme des chiffres de B.
   ➠ D la somme des chiffres de C.

   (a) $4444^{4444} < 10000^{4444}$ car la fonction $x \mapsto x^{4444}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   de plus $10000^{4444} < 10000^{5000} = 10^{20000}$
   Donc $A < 10^{20000}$ et A comporte au plus 20000 chiffres.

   (b) On note $A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$ l'écriture de A en base 10.
   On a donc $B = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_+ a_1 + a_0$
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq 9$ et $n \leq 20000$ donc $B \leq 9 \times 20000$ donc $\boxed{B \leq 180000}$

   (c) Comme $B \leq 180000$ alors il a au maximum 6 chiffres donc $C \leq 9 \times 6$ donc $\boxed{C \leq 54}$

   (d) C est un nombre d'au plus 2 chiffres dont le chiffre des centaines est inférieur ou égal à 5 et celui des unités à 9. Donc $D \leq 5 + 9$ donc $\boxed{D \leq 14}$

   (e) On a $A \equiv B$ [9] et $B \equiv C$ [9] et $C \equiv D$ [9]
   On peut en conclure que $A \equiv D$ [9]
   Or $A \equiv 7$ [9] donc $D \equiv 7$ [9]
   Or $D \in [1; 14]$ donc $\boxed{D = 7}$

Exercice 2 :

1. Soit a un entier qui n'est pas multiple de 7.
   ➠ Si $a \equiv 1$ [7] alors $a^3 \equiv 1$ [7]
   ➠ Si $a \equiv 2$ [7] alors $a^3 \equiv 8$ [7] $\equiv 1$ [7]
   ➠ Si $a \equiv 3$ [7] alors $a^3 \equiv 27$ [7] $\equiv -1$ [7]
   ➠ Si $a \equiv 4$ [7] alors $a^3 \equiv 64$ [7] $\equiv 1$ [7]
   ➠ Si $a \equiv 5$ [7] alors $a^3 \equiv 125$ [7] $\equiv -1$ [7]
   ➠ Si $a \equiv 6$ [7] alors $a^3 \equiv 216$ [7] $\equiv -1$ [7]
   donc si a n'est pas multiple de 7 alors $a \equiv 1$ [7] ou $a \equiv -1$ [7].
2. ➠ Si $x \equiv 0$ [7] $\Rightarrow x^3 \equiv 0$ [7]
   ➠ Si $x^3 \equiv 0$ [7] $\Rightarrow$ d'après la première question la seule possibilté est $x \equiv 0$ [7].
   donc $x \equiv 0$ [7] $\Leftrightarrow x^3 \equiv 0$ [7].

3. Supposons que a , b et c ne soient pas congrus à 0 modulo 7.
   D'après la question 1. on a : $a^3 \equiv \pm 1$ [7], $b^3 \equiv \pm 1$ [7] et $b^3 \equiv \pm 1$ [7].
   donc $a^3 + b^3 + c^3 \equiv \pm 1$ [7] ou $a^3 + b^3 + c^3 \equiv \pm 3$ [7]
   ce qui est absurde car $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0$ [7].
   donc au moins un des a, b ou c est congru à 0 modulo 7.
4. La réciproque de la propriété précédente, est fausse
   car si $a^3 \equiv 0$ [7], $b^3 \equiv 1$ [7] et $c^3 \equiv 1$ [7]
   alors $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 2$ [7]