Exercice : Le nombre d'or et la base d'or

1. Quelques questions préléminaires :

(a) $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\varphi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

donc $\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1}$

(b) Démontrons cette égalité par récurrence :
On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $\ll \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1} \gg$
Initialisation :
$\varphi^1 = 1\varphi + 1 = F_1\varphi + F_0$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité :
On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
$\varphi^{n+1} = \varphi^n \times \varphi = (F_n\varphi + F_{n-1})\varphi = F_n\varphi^2 + F_{n-1}\varphi$
donc
$\varphi^{n+1} = (F_n + F_{n-1})\varphi + F_n = F_{n+1}\varphi + F_n$
donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}}$

(c) On sait à la question (a) que $\varphi^2 = \varphi + 1$
comme $\varphi \neq 0$ alors on peut alors diviser par φ :
On obtient donc $\varphi = 1 + \varphi^{-1}$ donc $\boxed{\varphi^{-1} = \varphi - 1}$.

(d) Démontrons cette égalité par récurrence :
On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $\ll \varphi^{-n} = (-1)^{n-1}F_n\varphi + (-1)^nF_{n+1} \gg$
Initialisation :
$\varphi^{-1} = 1\varphi - 1 = (-1)^{1-1}F_1\varphi + (-1)^1F_2$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité :
On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
$\varphi^{-(n+1)} = \varphi^{-n} \times \varphi^{-1} = ((-1)^{n-1}F_n\varphi + (-1)^nF_{n+1})\varphi^{-1} = (-1)^{n-1}F_n\varphi\varphi^{-1} + (-1)^nF_{n+1}\varphi^{-1}$
donc
$\varphi^{n+1} = (-1)^{n-1}F_n + (-1)^nF_{n+1}(\varphi - 1) = (-1)^nF_{n+1}\varphi + (-1)^{n-1}F_n - (-1)^nF_{n+1}$
donc
$\varphi^{n+1} = (-1)^nF_{n+1}\varphi + (-1)^{n-1}F_n + (-1)^{n+1}F_{n+1} = (-1)^nF_n\varphi + (-1)^{n+1}(F_n + F_{n+1})$
or $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$
donc
$\varphi^{n+1} = (-1)^nF_n\varphi + (-1)^{n+1}F_{n+2}$
donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\varphi^{-n} = (-1)^{n-1}F_n\varphi + (-1)^nF_{n+1}}$

(e) D'après les questions précédentes on a :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$\begin{cases} \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1} \\ \varphi^{-n} = (-1)^{n-1}F_n\varphi + (-1)^nF_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1} \\ (-1)^n\varphi^{-n} = -F_n\varphi + F_{n+1} \end{cases}$
En additionnant les deux égalités on obtient :

$$\boxed{\varphi^n + (-1)^n\varphi^{-n} = F_{n-1} + F_{n+1}}$$

(f) En posant $n = 2k$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\boxed{[F_{2k+1} + F_{2k-1}] = \varphi^{2k} + \varphi^{-2k}}$$

2. Écriture en base **phinaire**.

   (a) Écriture des nombres entiers en base phinaire :

      i. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$.

      ii. $1 = \varphi^0$ donc 1 en base phinaire.

      iii. On sait que $\varphi^2 = -\varphi + 2$ donc $2 = \varphi - \varphi + 2 = \varphi + \varphi^{-2}$
      donc on obtient **10,01** en écriture phinaire.

      iv. $F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3$
      or d'après la question 1(f) on a $F_3 + F_1 = \varphi^2 + \varphi^{-2}$
      donc on obtient **100,01** en écriture phinaire.

      v. $3 + \varphi^0 = 3 + 1 = 4$
      donc $4 = \varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2}$
      donc on obtient **101,01** en écriture phinaire.

      vi. D'après les questions préliminaires :
      $\varphi^3 = 2\varphi + 1$
      $\varphi^{-1} = \varphi - 1$
      $\varphi^{-4} = -3\varphi + 5$
      donc $\varphi^3 + \varphi^{-1} + \varphi^{-4} = 2\varphi + 1 + \varphi - 1 - 3\varphi + 5 = 5$
      donc on obtient **1000,1001** en écriture phinaire.

      vii. D'après les questions préliminaires :
      $\varphi^3 + \varphi^1 + \varphi^{-4} = 2\varphi + 1 + \varphi - 3\varphi + 5 = 6$
      donc on obtient **1010,0001** en écriture phinaire.

      viii. $F_5 + F_3 = 5 + 2 = 7$
      or d'après la question 1(f) on a $F_5 + F_3 = \varphi^4 + \varphi^{-4}$
      donc on obtient **10000,0001** en écriture phinaire.

      ix. On a $8 = 7 + 1 = \varphi^4 + \varphi^{-4} + \varphi^0$
      donc on obtient **10001,0001** en écriture phinaire.

      x. $9 = 7 + 2 = \varphi^4 + \varphi^{-4} + \varphi + \varphi^{-2} = \varphi^4 + \varphi^1 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4}$
      donc on obtient **10010,0101** en écriture phinaire.

      xi. $F_7 + F_5 = 13 + 5 = 18$
      or d'après la question 1(f) on a $F_7 + F_5 = \varphi^6 + \varphi^{-6}$
      donc on obtient **1000000,000001** en écriture phinaire.

      xii. $F_9 + F_7 = 34 + 13 = 47$
      or d'après la question 1(f) on a $F_9 + F_7 = \varphi^8 + \varphi^{-8}$
      donc on obtient **100000000,00000001** en écriture phinaire.

   (b) Passage de l'écriture phinaire à l'écriture décimale :

      i. $a = 2\varphi^0 + 3\varphi^{-1} = 2 + 3(\varphi - 1) = 2 + 3\varphi - 3 = 3\varphi - 1$

donc $a = 3 \times \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$ donc $\boxed{a = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}}$

ii. $x = 2\varphi^2 + \varphi + 1 + \varphi^{-2} = 2(\varphi+1) + \varphi + 1 - \varphi + 2$
donc
$x = 2\varphi + 5 = 2 \times \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 5 = \dfrac{12+2\sqrt{5}}{2} = 6 + \sqrt{5}$
donc $\boxed{x = 6 + \sqrt{5}}$

iii. $y = 3\varphi^2 + 2\varphi + 7 + 2\varphi^{-1} + 5\varphi^{-2} + 7\varphi^{-3}$
donc
$y = 3(\varphi+1) + 2\varphi + 7 + 2(\varphi-1) + 5(-\varphi+2) + 7(2\varphi-3)$
donc
$y = 16\varphi - 3 = 16 \times \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 3 = 5 + 8\sqrt{5}$ donc $\boxed{y = 5 + 8\sqrt{5}}$

(c) Écriture de quelques nombres réels en base phinaire :

i. Si $z = 10,1$ en base phinaire alors en base décimale, on obtient :
$z = \varphi + \varphi^{-1} = 2\varphi - 1 = 1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5}$
donc $\sqrt{5}$ s'écrit **10,1** en bas phinaire.

ii. 3 s'écrit $100,01$ en base phinaire.
$\sqrt{5}$ s'écrit $10,1$ en base phinaire.
donc $3 + \sqrt{5}$ s'écrit **110,11** en base phinaire.

iii. 4 s'écrit $101,01$ en base phinaire.
$\sqrt{5}$ s'écrit $10,1$ en base phinaire.
donc $4 + \sqrt{5}$ s'écrit **111,11** en base phinaire.