Exercice 1 :

Quelques petites questions sur les nombres premiers :

1. Tous les nombres entiers naturels sont de la forme $4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$.
   Or les nombres premiers supérieurs à 2 sont impairs donc ils ne sont pas de la forme $4k$ et $4k+2$.
   De plus $4k+3 = 4k+4-1 = 4(k+1)-1 = 4k'-1$
   donc les nombres permeirs supérieurs à 2 sont de la forme $4k \pm 1$

2. Les nombres de la forme $4k \pm 1$ ne sont pas tous premiers car $25 = 4 \times 61$ n'est pas premier.

3. $x^2 - y^2 = p \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = p$
   Or p étant premier et comme $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ alors on peut avoir :
   $(a) : \begin{cases} x+y = p \\ x-y = 1 \end{cases}$ et $(b) : \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = p \end{cases}$

   (a) On obtient donc $x = \dfrac{p+1}{2}$ et $y = \dfrac{p-1}{2}$
   Or comme p est un nombre premier supérieur à 2 alors p est impair donc $p+1$ et $p-1$ sont pairs et donc $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$

   (b) On obtient donc $x = \dfrac{p+1}{2}$ et $y = \dfrac{1-p}{2}$
   Or comme p est un nombre premier supérieur à 2 alors $1-p$ est négatif yn'appartient pas à $\mathbb{N}$ donc cette solution est impossible.

   L'ensemble des solutions est donc : $S = \left\{ \left(\dfrac{p+1}{2}; \dfrac{p-1}{2} \right) \right\}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

   (b) $x^3 - y^3 = 127 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 127$
   Or 127 est un nombre premier donc on peut avoir :
   $(a) : \begin{cases} x-y = 127 \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases}$ et $(b) : \begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+xy+y^2 = 127 \end{cases}$

   (a) $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors $x^2+xy+y^2 > 1$ donc ce système n'est pas possible à résoudre dans $\mathbb{N}$.

   (b) $\begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+xy+y^2 = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ (1+y)^2 + (1+y)y + y^2 = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ 3y^2 + 3y - 126 = 0 \end{cases}$

   Résolvons l'équation du second degré : $3y^2 + 3y - 126 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-126)(3) = 1521 = 39^2$
   donc $\Delta > 0$ et il y a deux solutions réelles distincts.
   $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+39}{6} = \dfrac{36}{6} = 6$
   $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-39}{6} = -\dfrac{42}{6} = -7$
   Donc la seule solution possible est $y = 6$ et donc $x = 1 + y = 7$
   donc l'ensemble des solutions est $S = \{(7;6)\}$

5. Les diviseurs de p^n sont p^0, p^1, ..., p^{n-1} et p^n
   Donc la somme de ses diviseurs est :
   $S = p^0 + p^1 + \ldots + p^{n-1} + p^n$
   On obtient une somme de termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison p
   donc $S = 1 \times \dfrac{1-p^{n+1}}{1-p} = \dfrac{1-p^{n+1}}{1-p}$

Exercice 2 :

1. On note $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta}$
   Le nombre de diviseurs de n est 6 donc $(\alpha+1)(\beta+1) = 6$ avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$
   Or les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6
   donc les seules possibilités sont :
   $\left\{\begin{array}{l}\alpha+1=2\\ \beta+1=3\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}\alpha+1=3\\ \beta+1=2\end{array}\right.$
   On va donc prendre $\left\{\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=2\end{array}\right.$ car l'autre système va donner la même chose.
   On a donc $n = p_1 p_2^2$
   Les diviseurs de n sont donc $(p_1^0 + p_1^1)(p_2^0 + p_2^1 + p_2^2)$
   Il faut donc résoudre $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2) = 28$
   Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28
   or $p_1 \geq 2$ et $p_2 \geq 2$ donc $p_1 + 1 \geq 3$ et $1 + p_2 + p_2^2 \geq 3$ donc on peut avoir seulement $1 + p_1 = 4$ ou $1 + p_1 = 7$
   ➡ Si $1 + p_1 = 4$
   alors $p_1 = 3$ et $1 + p_2 + p_2^2 = 7 \Leftrightarrow p_2^2 + p_2 - 6 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-6) = 25 = 5^2$ donc il y a deux racines réelles distincts :
   $p_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$
   $p_2' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ (n'appartient pas à $\mathbb{N}$)
   donc $p_2 = 2$ et $n = p_1 p_2^2 = 3 \times 4 = 12$ donc $\boxed{n = 12}$
   ➡ Si $1 + p_1 = 7$
   alors $p_1 = 6$ et $1 + p_2 + p_2^2 = 4 \Leftrightarrow p_2^2 + p_2 - 3 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-3) = 13 = (\sqrt{13})^2$ donc il y a deux racines réelles distincts mais non entières.

2. On a $n = 5^{\alpha} 7^{\beta}$ avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$
   et $n^2 = 5^{2\alpha} 7^{2\beta}$
   n a $(\alpha+1)(\beta+1)$ diviseurs et n^2 a $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ diviseurs.
   donc il faut résoudre :
   $3(\alpha+1)(\beta+1) = (2\alpha+1)(2\beta+1) \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta - 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\beta-1) = 3$
   or 3 est un nombre premier, donc on a :
   $\left\{\begin{array}{l}\alpha-1=1\\ \beta-1=3\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}\alpha-1=3\\ \beta-1=1\end{array}\right.$
   donc $\left\{\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=4\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}\alpha=4\\ \beta=2\end{array}\right.$
   Les deux possibilités sont donc $n = 5^2 7^4$ et $n = 5^4 7^2$
   donc $\boxed{n = 60025}$ ou $\boxed{n = 3065}$