Exercice 1 :
Nous souhaitons démontrer la propriété ci-dessous :

La racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait, est irrationnel.

1. Si on suppose que $\sqrt{a}$ est un rationnel alors il existe deux entiers naturels uniques p et q avec $q \neq 0$ et $pgcd(p,q) = 1$ tels que :
$$\sqrt{a} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{a} = p \Rightarrow q^2 q = p^2$$
donc
$$\boxed{\mathrm{p}^2 = aq^2}$$
2. $p'^2 - aq'^2 = (aq - np)^2 - a(p - nq)^2$
$= a^2q^2 - 2anpq + n^2p^2 - a(p^2 - 2npq + n^2q^2) = a^2q^2 - 2anpq + n^2p^2 - ap^2 + 2anpq - an^2q^2$
$= a^2q^2 + n^2p^2 - ap^2 - an^2q^2 = n^2(p^2 - aq^2) - a(p^2 - aq^2)$
or $p^2 = aq^2$ donc $p^2 - aq^2 = 0$
donc $p'^2 - aq'^2 = 0$
3. On a $\dfrac{p'^2}{q'^2} = \dfrac{p^2}{q^2} = a$ donc $\dfrac{p'}{q'} = \dfrac{p}{q}$ ou $\dfrac{p'}{q'} = -\dfrac{p}{q}$
Démontrons que p' et q' sont positifs. :
   - $p' = aq - np$ or $p = \sqrt{a}q$ donc $p' = aq - n\sqrt{a}q = (a - \sqrt{a}n)q$
   or $n < \sqrt{a}$ donc $n\sqrt{a} < a$ donc $p' > 0$
   - $q' = p - nq$ or $p = \sqrt{a}q$ donc $q' = \sqrt{a}q - nq = (\sqrt{a} - n)q$
   or $n < \sqrt{a}$ donc $q' > 0$

   Conclusion : $\boxed{\dfrac{p'}{q'} = \dfrac{p}{q}}$
4. (a) Si $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ avec $\dfrac{p}{q}$ irréductible, alors q' est un multiple de q.
   (b) Si q' est un multiple de q alors q divise q' et donc q divise $p - nq$ donc q divise p.
   Or $pgcd(p,q) = 1$ donc ce n'est pas possible que q divise p donc q' n'est pas un multiple de q.
5. On vient de prouver que l'on ne peut pas trouver p et q uniques tels que $\sqrt{a} = \dfrac{p}{q}$ avec $pgcd(p,q) = 1$ donc $\sqrt{a}$ est irrationnel.

Exercice 2 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{n+1}^{k=1} k(k+1) = \sum_{n}^{k=1} k(k+1) + (n+1)(n+2) = S_n + (n+1)(n+2)$
2. On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
Initialisation :
   - $S_1 = \displaystyle\sum_{1}^{k=1} k(k+1) = 1(1+1) = 2$
   - $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

   donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
   Caractère héréditère :
   - On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et donc que $\displaystyle\sum_{n}^{k=1} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- Démontrons alors que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi.

  D'après la question 1., $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} + \dfrac{3(n+1)(n+2)}{3}$
  donc
  $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie aussi.

  On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. $S_{245} = \dfrac{245 \times 246 \times 247}{3} = 4962230$