Correction des exercices non corrigés en classe :

Exercice3 :

(d) On utilise la propriété suivante (conséquence du théorème de Bézout) :
$PGCD(a,b)=1 \Leftrightarrow \exists u\in\mathbb{Z}$ et $\exists v\in\mathbb{Z}$ tels que $au+bv=1$

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-2(n)+1(2n+1)=1 \Rightarrow PGCD(n,2n+1)=1$
donc $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible.
Autre méthode (sans Bézout)
On applique l'algorithme d'Euclide :
$2n+1=2(n)+1$
$n=1(n)+0$
donc $PGCD(n,2n+1)=1$

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3(4n+3)-4(3n+2)=1 \Rightarrow PGCD(4n+3,3n+2)=1$
donc $\dfrac{4n+3,}{3n+2}$ est irréductible.
Autre méthode (sans Bézout)
On applique l'algorithme d'Euclide :
$4n+3=1(3n+2)+n+11$
$3n+2=2(n+1)+n$
$n+1=1(n)+1$
$n=1(n)+0$
donc $PGCD(4n+3,3n+2)=1$

(e) **(i)** Supposons que la fraction est réductible.
Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $k|n+3$ et $k|2n+3$
Or $2n+3=2(n+3)-3$ donc $k|3$ donc $n+3\equiv 0\ [3]$ donc $n\equiv 0\ [3]$.
Donc $\dfrac{2n+3}{n+3}$ est irréductible si $n\equiv 1\ [3]$ et $n\equiv 2\ [3]$.

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1(3n-1)-1(3n-2)=1 \Rightarrow PGCD(3n-1,3n-2)=1$
donc $\dfrac{3n-1,}{3n-2}$ est irréductible.
Autre méthode (sans Bézout)
On applique l'algorithme d'Euclide :
$3n-1=1(3n-2)+1$
$3n-2=1(3n-2)+0$
donc $PGCD(4n+3,3n+2)=1$

(f) Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.
On pose $A=x+y$ et $B=2x+3y$.

1. On note $k\in\mathbb{Z}$ un diviseur commun de x et y
alors k divise toutes les combinaisons linéaires dans $\mathbb{Z}$ de x et y donc k divise A et B.
2. $2A-B=2x+2y-2x-3y=-y$ donc $y=B-2A$
$3A-B=3x+3y-2x-3y=x$ donc $x=3A-B$
On note $k\in\mathbb{Z}$ un diviseur commun de A et B
alors k divise toutes les combinaisons linéaires dans $\mathbb{Z}$ de A et B donc k divise x et y.
3. On note $A=2^n+3^n$ et $B=2^{n+1}+3^{n+1}=2(2^n)+3(3^n)$
donc d'après la question précédente tout diviseur de A et de B divise 2^n et 3^n. Or le seul diviseur commun de 2^n et 3^n est 1 donc A et B sont premiers entre eux.