Exercice 1 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité) **5 points**

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).
   (b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
2. Soit un repère orthonormal de l'espace.
   On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
   On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan .
   Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.
   (a) Montrer que l'entier y est impair.
   (b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
   Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
   (c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
   Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$.
   En déduire que q prend les valeurs O ou 1.
   (d) En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 2 spécialité **5 points**

1. (a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.
   (b) En déduire deux entiers, relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.
   (c) Déterminer tous les couples $(a,\ k)$ d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.
2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.
   On décide de coder un message, en proçédant comme suit :
   À chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre O et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

   Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.
   On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.
   (a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\left\{\begin{array}{lcll} 5a+b & \equiv & 10 & \text{modulo } 26 \\ 19a+b & \equiv & 14 & \text{modulo } 26 \end{array}\right.$
   (b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.
   (c) Determiner tous les couples d'entiers $(a,\ b)$, avec $0a25$ et $0b25$, tels que $\left\{\begin{array}{lcll} 5a+b & \equiv & 10 & \text{modulo } 26 \\ 19a+b & \equiv & 14 & \text{modulo } 26 \end{array}\right.$
3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.
   (a) Coder le message $\boxed{\text{GAUSS}}$.
   (b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0 \quad \text{modulo } 26$.
   En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.